

(1)

AUXILIAR GUÍA N° 1°

PROPIEDADES°

IGNACIO TRUJILLO SILVA.

$$(1) \sum (a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$$

$$(2) \sum c \cdot a_i = c \sum a_i \quad \text{con } c = \text{cte.}$$

FORMULAS°

$$(1) \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$(2) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(4) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(5) \sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

BINOMIO DE NEWTON

$$(6) (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Voy a REPETIR ALGUNOS DE LA CLASE
PARA QUE QUEDEN MÁS CLAROS.

1.º) probar $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

por INDUCCIÓN: se verifica para $n=0$.

se verifica para $n=1$.

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 = 1 \quad \checkmark$$

(2)

Sea cierta la expresión para $n=k$.

$$0 + 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

luego debemos probar que para $n=k+1$, se cumple

$$0 + 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{0 + 1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2} \text{ por (1)}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k^2 + k + 2k + 1}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\text{luego, } \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \checkmark \checkmark$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) la suma de un número natural y su cuadrado es un número par.

$$n + n^2 = 2h \quad \text{con } h \in \mathbb{N}$$

$$\text{cuando } n=1 \quad 2 = 2h \quad \checkmark \checkmark$$

Ahora, sea cierto que $n=k$

$$k + k^2 = 2h \quad \checkmark \checkmark \quad (1)$$

luego debemos probar que cuando $n=k+1$, se cumple la proposición.

(3)

$k+1 + (k+1)^2$ es par.

$$= k+1 + k^2 + 2k + 1$$

$$= \underbrace{k + k^2}_{\text{USANDO (1)}} + 2(k+1)$$

$$= 2k + 2(k+1)$$

$$= 2(k + (k+1))$$

$$\Rightarrow k + k^2 \text{ es par } \forall k \in \mathbb{N}.$$

(c) LA SUMA DE LOS PRIMEROS n IMPARES ES IGUAL AL n -ÉSIMO CUADRADO.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

por INDUCCIÓN:

para $n=1$ $1=1$ ✓

Ahora, sea cierto que $n=k$.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (H)$$

Debemos probar que se cumple con $n=k+1$.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1 + 2(k+1)-1 = (k+1)^2.$$

Tomando la parte izquierda de la ecuación.

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 2k-1}_{\text{USANDO (1)}} + 2k+1 = k^2 + 2k+1$$

$$\text{USANDO (1)} \quad k^2$$

$$= (k+1)^2.$$

luego $(k+1)^2 = (k+1)^2$ ✓✓

$$\Rightarrow 1 + 3 + \dots + 2n-1 = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(4) EL d) y el e) ~~titular~~ ESTARAN RESUELTOS EN UN PAR DE DIAS. TENGO QUE PENSARLOS UN POCO.

f) ESTE EJERCICIO, SOLO NECESITA pensarse

PERSONAS

0 0 0 0 0
1 2 3 4 n

- EL PRIMERO SALUDA A $(n-1)$
- EL SEGUNDO SALUDA A $(n-2)$, POR QUE YA SALUDO AL PRIMERO.
- ...
- EL ULTIMO SALUDA A $(n-n)$, POR QUE YA TODOS LO SALUDARON.

SI SUMAMOS $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-n)$
DEBEMOS IGUAL A $\frac{n(n-1)}{2}$.

POR INDUCCION:

PARA $n=1$.

$$(1-1) = 0 = 0 = \frac{1(1-1)}{2} \quad \checkmark \checkmark$$

PARA $n=k$, HA CIERTO QUE.

$$(k-1) + (k-2) + \dots + (k-k) = \frac{k(k-1)}{2} \quad (1)$$

AHORA, DEBEMOS DEMOSTRAR QUE SE CUMPLE ESTA IGUALDAD PARA $n=k+1$.

$$(k+1-1) + \underbrace{(k-1) + (k-2) + \dots + (k-k)}_{\text{POR (1)}} = \frac{(k+1)k}{2}$$

$$\text{POR (1)} = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$k + \frac{k(k-1)}{2} =$$

$$\frac{k^2 - k + 2k}{2} =$$

$$(5) \quad \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \checkmark \checkmark$$

$$\Rightarrow (n-1) + \dots + (n-n) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

g). 9 divide a $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, para cual cual
valor de $n \in \mathbb{N}$.

probarlo por INDUCCIÓN:

para $n=1$

$$10 + 3 \cdot 64 + 5 = 207 = 9 \cdot 23 \quad \checkmark \checkmark$$

Ahora, para $n=k$, sea cierto que

$$10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9 \cdot h \quad (1)$$

Ahora de los probar que para $n=k+1$.

$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5$ es divisible por 9 y
se obtiene un ENTERO.

$$10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 = 10^k \cdot 10 + 3 \cdot 4^{k+2} \cdot 4 + 5$$

$$= 10^k + 9 \cdot 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 3 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} + 5$$

$$= 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 4^{k+2} + 5$$

$$\text{USANDO (1)} \quad = 9h + 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 4^{k+2}.$$

$$= 9(h + 10^k + 4^{k+2})$$

$$\Rightarrow 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 \text{ ES divisible por 9}$$

y se obtiene un ENTERO.

* Que es lo mismo que 9 divide a $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$

(6)

h) Si x es positivo entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$
para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por inducción:

para $n=1$ se cumple.
 $(1+x) \geq 1+x \quad \checkmark$

para $n=k$, sea cierto que

$$(1+x)^k \geq 1+kx \quad (1)$$

Ahora, debemos probar que se cumple
para $n=k+1$ la siguiente igualdad.

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x \quad (2)$$

$$\text{USANDO (1). } (1+x)^k (1+x) \geq (1+x)(1+kx) \quad (3)$$

Solo se multiplico (1) por $(1+x)$ para
que se pareciera al término izquierdo de (2).

$$\text{entonces } (1+x)(1+kx) \text{ de (3)}$$

$$\begin{aligned} (1+x)(1+kx) &= 1+kx^2+x+kx \quad (4) \\ &= x(k+1) + 1+kx^2. * \end{aligned}$$

$$\text{Wego como } kx^2 \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

podemos tomar *

$$1+x(k+1)+kx^2 \geq 1+x(k+1).$$

Wego, entonces (4)

$$(1+x)(1+kx) \geq 1+x(k+1)$$

Finalmente usando (3)

$$(1+x)^{k+2} \geq 1+x(k+1) \quad \checkmark \checkmark$$

(7) Como se cumple la desigualdad.

$$\Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}.$$

Analicen detenidamente el ejercicio, es bastante simple pero produce confusión. Es muy previsible en un control.

i) para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
por inducción:
para $n=1$.

$$\frac{1}{1 \cdot (2)} = \frac{1}{2} \quad \checkmark \text{ se cumple.}$$

para $n=t$ sea cierto que.

$$\sum_{k=1}^t \frac{1}{k(k+1)} = \frac{t}{t+1}. \quad (1)$$

luego, debemos probar que con $n=t+1$.

$$\text{se cumple } \sum_{k=1}^{t+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{t+1}{t+2}.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^t \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{por (1) es } \frac{t}{t+1}} + \frac{1}{(t+1)(t+2)} =$$

$$\text{por (1) es } \frac{t}{t+1}.$$

$$\frac{t}{t+1} + \frac{1}{(t+1)(t+2)} =$$

$$\frac{t^2 + 2t + 1}{(t+1)(t+2)} =$$

$$\frac{(t+1)}{(t+2)} = \frac{(t+1)}{(t+2)} \Rightarrow \text{que } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(8) \quad j) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 \leq \frac{n^4}{4} \leq 1^3 + \dots + (n-1)^3 + n^4.$$

PARA RESOLVER ESTE EJERCICIO SOLO SE DEBE
SEPARAR EN DOS PROBLEMAS.

$$(1) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 \leq \frac{n^4}{4}$$

$$(2) \quad \frac{n^4}{4} \leq 1^3 + \dots + (n-1)^3 + n^4$$

ANÁLISIS (1)

POR INDUCCIÓN:

PARA $n=1$.

$$0 \leq 1/4$$

luego para $n=k$, sea cierto que

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 \leq \frac{k^4}{4} \quad (3)$$

Deberemos probar que para $n=k+1$ se cumple

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 + k^3 \leq \frac{(k+1)^4}{4}$$

NOTAMOS

$$\text{USANDO (3)} \quad \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3}_{\frac{k^4}{4}} + k^3 = \frac{k^4}{4} + k^3$$

$$= \frac{k^4 + 4k^3}{4} \stackrel{>0}{\leq} \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{4}$$

PARA FORMAR UN

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k-1)^3 + k^3 \leq \frac{(k+1)^4}{4}$$

$\Rightarrow$ QUE (1) ES CORRECTO.

(9) LA PARTE (2) DEL EJERCICIO (j) QUEDA DE TAREA.
ES EXACTAMENTE IGUAL.

ⓐ) DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN 3 Si a_1 es DADO
y se define $a_{n+1} = 2a_n + 1$ para cualquier
VALOR de $n \in \mathbb{N}$, ENTONCES.

$$a_{n+1} = 2^{n-1}(a_1 + 1).$$

por INDUCCIÓN:

para $n = 1$

$$1 + a_1 = a_1 + 1$$

~~USANDO ENUNCIADO~~

~~II~~

para $n = k$, sea cierto que.

$$a_k + 1 = 2^{k-1}(a_1 + 1). *$$

Ahora, Debemos probar que para $n = k+1$
se cumple

$$a_{k+1} + 1 = 2^k(a_1 + 1). \quad (1)$$

Tomamos la parte izquierda de (1).

$$a_{k+1} + 1 = 2a_k + 1 + 1$$

USANDO ENUNCIADO

$$= 2(a_k + 1)$$

USANDO *

$$= 2 \cdot 2^{k-1}(a_1 + 1)$$

$$= 2^k(a_1 + 1).$$

$$\text{Luego } 2^k(a_1 + 1) = 2^k(a_1 + 1) \quad \checkmark \checkmark$$

$$\Rightarrow a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1).$$

(10) a) Sea $Q_1 = \sqrt{2}$ y Defina $Q_{n+1} = \sqrt{2+Q_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
entonces $Q_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$ y Ademas $Q_n < Q_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

por INDUCCIÓN

$$n=1 \quad Q_1 < 2 \\ \sqrt{2} < 2 \quad \checkmark \checkmark$$

para $n=k$, sea cierto que.

$$Q_k < 2. \quad (1)$$

para $n=k+1$ se debe probar que

$$Q_{k+1} < 2. \quad (1')$$

tomamos $Q_{k+1} = \sqrt{2+Q_k}$ del enunciado.

Ahora tomamos (1).

$$Q_k < 2 \quad / + 2 \\ 2 + Q_k < 4. \quad / \sqrt{} \\ \sqrt{2+Q_k} < 2.$$

$$\text{Como } Q_{k+1} = \sqrt{2+Q_k}$$

$$Q_{k+1} < 2.$$

por INDUCCIÓN probaremos: que " $Q_n < Q_{n+1}$ ".

para $n=1$ $Q_1 < Q_2$ usando enunciado.

$$\sqrt{2} = Q_1 < \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \checkmark \checkmark$$

para $n=k$, sea cierto.

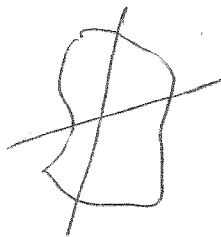
$$Q_k < Q_{k+1}$$

(11)

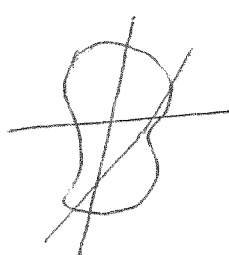
En) La cantidad máxima de regiones en que n rectas dividen el plano es $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.



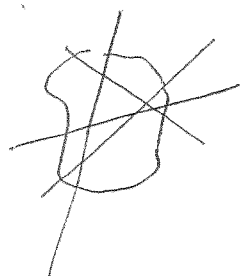
1 RECTA
2 REGIONES



2 RECTAS
4 REGIONES



3 RECTAS
7 REGIONES



4 RECTAS
11 REGIONES

Nota: La manera de ir obteniendo el máximo de regiones es cortar todas las rectas anteriores.

Q_n = Número de regiones al cortar con la n -ésima recta.

$$Q_1 = 2$$

$$Q_{n+1} = Q_n + n + 1.$$

Demostremos por INDUCCIÓN.

$$n=1 \quad Q_2 = Q_1 + 2.$$

$$4 = Q_2 = 4 \quad \checkmark \checkmark$$

Para $n=k$, sea cierto que $Q_{k+1} = Q_k + k + 1$. (1)

Ahora, debemos probar que para $n=k+1$, se

Cumple $Q_{k+2} = Q_{k+1} + k + 2.$

tomando, $Q_{k+2} = Q_{k+1} + k + 1 + 1$ usando (1)
 $= Q_{k+1} + k + 2.$

luego, $Q_{k+1} + k + 2 = Q_{k+1} + k + 2 \quad \checkmark$

$$\Rightarrow Q_{n+1} = Q_n + n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(12)

DE LA PARTE (2) DE LA GUÍA, SOLO REALIZAR
LOS NO EXPUSTOS EN CLASE.

b) CALULE LA SUMA DE LOS PRIMEROS n NUMEROS
PARES.

$$\sum_{i=1}^n 2i = 2 \sum_{i=1}^n i \quad \text{USANDO PROPIEDAD PAG. 1.}$$

$$= 2 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n^2 + n.$$

c) CALULE.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}.$$

se puede escribir como

$$S = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{11 \cdot 10}$$

USANDO EJERCICIO 1. c)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{CON } n=10 \Rightarrow S = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{11}$$

$$\text{EL RESULTADO ES } S = \frac{10}{11}$$

(13) 2. f)

$$S = 1 + 1 + X + 1 + X + X^2 + 1 + X + X^2 + X^3 + 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5.$$

$$S = \sum_{i=0}^5 \sum_{k=0}^i X^k$$

$$= \sum_{i=0}^5 \frac{1 - X^{i+1}}{1 - X}$$

$$= \frac{1}{1 - X} - \frac{1}{1 - X} \sum_{i=0}^5 X^{i+1}$$

$$= \frac{1}{1 - X} - \frac{X}{1 - X} \sum_{i=0}^5 X^i$$

$$= \frac{1}{1 - X} - \frac{X}{1 - X} \cdot \frac{1 - X^6}{1 - X}$$

$$= \frac{1 + X - X + X^7}{(1 - X)^2}$$

$$= \frac{1 + X^7}{(1 - X)^2}$$

2. h) Queda propuesto, se resuelve con una suma geométrica, y otra normal.

Lo que busca, es el darle cuenta de cuán rápido crecen las sumatorias con respecto a otras.

(14) 3.-

$$\begin{aligned} a) \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^k 2^i &= \sum_{k=0}^m \frac{1-2^{k+1}}{1-2} \\ &= \sum_{k=0}^m 2^{k+1} - \sum_{k=0}^m 1 \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1-2^{m+1}}{1-2} \right] - m \\ &= 2^{m+2} - m - 2. \end{aligned}$$

$$b) \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^k 2^k = \sum_{k=0}^m k \cdot 2^k = S$$

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + m \cdot 2^m.$$

Solo se debe multiplicar S por 2.

$$2 \cdot S = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + m \cdot 2^{m+1}.$$

$$\begin{aligned} S - 2S &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^m - m \cdot 2^{m+1} \\ &= 2 \cdot \underbrace{\left[1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} \right]}_{\text{GEOMETRICA}} - m \cdot 2^{m+1} \\ &= 2 \cdot \frac{1-2^m}{1-2} - m \cdot 2^{m+1} \end{aligned}$$

$$S(1-2) = 2^{m+1} - 2 - m \cdot 2^{m+1}$$

$$S = m \cdot 2^{m+1} + 2 - 2^{m+1}.$$

$$\underline{S = 2^{m+1} [m - 1] + 2.}$$

(15) 3, c)

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^k 2^m = \sum_{k=0}^m k 2^m$$

$$= 2^m \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2^{n-1} \cdot n(n+1)$$

3, d) Queda propuesto, ES FACIL.

(16)

Realizaremos los dos ejercicios de la parte 1.

d) $m^2 + m + 41$ el contra ejemplo es el siguiente

CUANDO $m = 41$

$$41^2 + 41 + 41 =$$

$$41(41 + 1 + 1) =$$

$$41 \cdot 43 = \Rightarrow \Leftarrow$$

UN NUMERO PRIMO SOLO SE PUEDE DIVIDIR POR EL MISMO Y POR 1.

B) UN CONJUNTO CON m ELEMENTOS, TIENE 2^m SUBCONJUNTOS.

Si proponemos el TRIANGULO DE PASCAL SUMADO.

$$1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

* LAS FILAS DEL TRIANGULO DE PASCAL, ME DA LOS SUBCONJUNTOS AGROUPADOS Y SU SUMA ES EL TOTAL DE SUBCONJUNTOS.

PARA OBTENER LA SUMA DE UNA FILA SE DEBE, OUPAR EL BINOMIO DE NEWTON

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$$

- probarlo por INDUCCION ES BASTANTE FACIL, POR ELLO QUE HA PROPUSTO.