# Guía ejercicios resueltos Sumatoria y Binomio de Newton

1.Calcule el valor de las siguientes sumatorias :

a) $\sum_{j=1}^{n} 2k$ b) $\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$ c) $\sum_{k=1}^{n}(6k-5)$ d) $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)$ e) $\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2$

f) $\sum_{j=1}^{n} 2j(2j+2)$ g) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$ h) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$ I) $\sum_{i=1}^{n} i^2(2i+3)$

j) $\sum_{i=7}^{20} i(3-2i)^2$ k) $\sum_{i=10}^{50}(i-\frac{1}{2})(2i-3)$

Solución:

a)

$$\sum_{j=1}^{n} 2k$$

Como *k* no depende de *j*, *2k* es constante a la sumatoria.

$$\sum_{j=1}^{n} 2k = 2k\sum_{j=1}^{n} 1 = 2kn$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+1) = 3\sum_{j=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n} 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+1) = 3\frac{(n+1)n}{2} + n$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n}(6k-5) = 6\sum_{j=1}^{n} k - 5\sum_{j=1}^{n} 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(6k-5) = 6\frac{(n+1)n}{2} - 5n$$

d)

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \sum_{j=1}^{n}(j^2+j) = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j$$

$$\sum_{j=1}^{n} j\,(j+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

e)

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2=\sum_{j=1}^{n}(4j^2-4j+1)=4\sum_{j=1}^{n}j^2-4\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1$$

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2=4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}+n$$

f)

$$\sum_{j=1}^{n}2j(2j+2)\quad=\sum_{j=1}^{n}(4j^2+4j)=4\sum_{j=1}^{n}j^2+4\sum_{j=1}^{n}j$$

$$\sum_{j-1}^{n}2j(2j+2)\quad=4\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

g)

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^3=\sum_{j=1}^{n}(8j^3-12j^2+6j-1)=8\sum_{j=1}^{n}j^3-12\sum_{j=1}^{n}j^2+6\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}1$$

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^3=8\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]-12\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+6\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+n$$

h)

$$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)=\sum_{j=1}^{n}(j^3+3j^2+2j)=\sum_{j=1}^{n}j^3+3\sum_{j=1}^{n}j^2+2\sum_{j=1}^{n}j$$

$$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)=\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]+3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Las demás se resuelven de la misma forma.

2.Calcule el valor de las siguientes sumatorias :

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ c) $\sum_{k=1}^{n} 3(4^k + 2k^2) - 4k^3$

Solución:

a)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] - \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right] + \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

Como es una sumatoria telescópica se salva el primero y el último.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} 3(4^k + 2k^2) - 4k^3 = 3\sum_{k=1}^{n} 4^k + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k^3$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^{n} 3\left(4^k + 2k^2\right) - 4k^3 = 3\sum_{k=0}^{n-1} 4^{k+1} + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3\left(4^k + 2k^2\right) - 4k^3 = 12\sum_{k=0}^{n-1} 4^{k} + 6\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3\left(4^k + 2k^2\right) - 4k^3 = 12\left[\frac{1-4^n}{1-4}\right] + 6\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

3. Si $x_1 = 2$ , $x_2 = 5$ , $x_3 = 9$ , $x_4 = -9$ , $x_5 = 0$ , $x_6 = -5$

Calcule el valor numérico de :

a) $\sum_{i=1}^{3}(x_i - 2)$ b) $\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i + 2}{(x_i - 5)^2}$ c) $\sum_{i=1}^{6}\frac{x_i^2 - 4}{x_i}$

Solución:

De esta sección solo realizare el primero, dada la simplicidad de los ejercicios.

$$\sum_{i=1}^{3}(x_1 - 2) = (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2)$$

Dado los valores del enunciado para $x_1, x_2, x_3$.

$$\sum_{i=1}^{3}(x_1 - 2) = (2-2) + (5-2) + (9-2) = 10$$

4.Calcular :

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-3)(k+1)$ c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!}$

e) $\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}$ f) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1}$ g) $\sum_{k=1}^{n}4^{k-1}$ h) $\sum_{k=1}^{n}(2/3)^{k-1}$ i) $\sum_{k=1}^{n}(-5)^{k-1}$

j) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$ k) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2^{i+j}$

Solución:

a)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k - n$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k-3) = 2\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k - 3n$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k-3) = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - 3n$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} - 1 - \frac{1}{n+2}$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1+1-1}{(k+2)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)-1}{(k+2)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+2}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+2)!}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right] + \left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n+1!}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

e)

$$\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = \frac{1-5^n}{1-5}$$

f)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{3}\right)^{k} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)}$$

g)

$$\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 4^k = \frac{1-4^n}{1-4}$$

h)

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}$$

i)

$$\sum_{k=1}^{n}(-5)^{k-1}$$

La sumatoria geométrica debería comenzar desde cero, pues conocemos la siguiente formula.

$$\sum_{k=0}^{m}r^{k}=\frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

Para empezar desde cero basta restarle uno a los límites de la sumatoria y a la vez sumar uno en la variable dentro de la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^{n}(-5)^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-5)^{k}=\frac{1-(-5)^{n}}{1+5}$$

j)

$$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)=\sum_{j=1}^{n}(j^{3}+3j^{2}+2j)=\sum_{j=1}^{n}j^{3}+3\sum_{j=1}^{n}j^{2}+2\sum_{j=1}^{n}j$$

$$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)=\left[\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}\right]+3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

k) J

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{i+j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{i}2^{j}$$

Para la sumatoria que esta más a la derecha el 2 elevado a la i, es independiente de j.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{i+j}=\sum_{i=0}^{n}2^{i}\sum_{j=0}^{n}2^{j}=\sum_{i=0}^{n}2^{i}\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]\sum_{i=0}^{n}2^{i}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{i+j}=\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]\sum_{i=0}^{n}2^{i}=\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]$$

5. *Calcular* : $\sum_{k=1998}^{n}\frac{2k}{(1+k^2+k^4)}$ Recordar : $1+K^2+K^4=(K^2+1)^2-K^2$

Solución:

6.El segundo término de una progresión aritmética es 20 y el quinto es 56 .Calcular el décimo término y la suma de los 10 primeros términos.

7.En una progresión aritmética el primer término es 4 y el de orden n es 34. Si la suma de los primeros n primeros es 247 .Determinar n y la diferencia.

8.La suma de los 50 primeros términos de una P.A es 200 y la suma de los 50 términos que siguen es 2700.Determine la P.A.

9.Una persona debe cancelar una deuda de $360000 en 40 cuotas que forman una P.A cuando 30 de los pagos están cubiertos la persona fallece , dejando la tercera parte de la deuda sin saldar .Calcular el valor de la primera cuota.

10.El cuarto término de una P.G es 54 y el séptimp es 729/4 .Determine la progresión.

Solución:

6) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s+k)+(s+2k)+(s+3k)+\ldots+(s+nk)$$

$$s+2k=20$$
$$s+5k=56$$
$$\Rightarrow k=12\wedge s=-4$$
$$(s+10s)=(-4+10*12)=116$$

$$(s+k)+(s+2k)+(s+3k)+\ldots+(s+10k)=\sum_{i=1}^{10}(s+ik)=10(-4)+12\frac{10(10+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{10}(s+ik)=-40+12\frac{10(10+1)}{2}=620$$

7) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s+k)+(s+2k)+(s+3k)+\ldots+(s+nk)$$

$$s+k=4$$
$$s+nk=34$$

$$\sum_{i=1}^{n}(s+ik)=247$$

Calculemos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n}(s+ik)=sn+k\frac{n(n+1)}{2}=247$$
$$sn+k\frac{n^2+n}{2}=247$$
$$2sn+kn^2+kn=494$$
$$n(2s+kn+k)=494$$

Ahora, sumemos las dos ecuaciones del enunciado.

$$s+k=4$$
$$s+nk=34$$
$$2s+nk+k=38$$

Reemplazando, $n(38)=494 \Rightarrow n=13$

8) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s+k)+(s+2k)+(s+3k)+\ldots+(s+nk)$$

$$\sum_{i=1}^{50}(s+ik)=200$$
$$\sum_{i=51}^{100}(s+ik)=2700$$

Calculemos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{50}(s+ik)=50s+k\frac{50(50+1)}{2}=200$$
$$50s+1275k=200$$

$$\sum_{i=51}^{100}(s+ik)=\sum_{i=1}^{100}(s+ik)-\underbrace{\sum_{i=1}^{50}(s+ik)}_{=200}=2700$$

$$\sum_{i=1}^{100}(s+ik)=2900$$

$$100s+k\frac{100(100+1)}{2}=2900$$

$$100s+5050k=2900$$

Tomado las dos ecuaciones;

$$50s+1275k=200 \qquad (1)$$

$$100s+5050k=2900 \qquad (2)$$

2*(1) - (2) $\quad (5050-2*1275)k=2900-400$

$$(2500)k=2500$$

$$k=1 \Rightarrow s=21{,}5$$

9) Las progresiones aritméticas son de la siguiente forma:

$$(s+k)+(s+2k)+(s+3k)+\ldots+(s+nk)$$

$$\sum_{i=1}^{40}(s+ik)=360000$$

$$\sum_{i=31}^{40}(s+ik)=\frac{360000}{3}$$

Calculemos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{40}(s+ik)=40s+k\frac{40(40+1)}{2}=360000$$

$$40s+820k=360000$$

$$\sum_{i=31}^{40}(s+ik)=\underbrace{\sum_{i=1}^{40}(s+ik)}_{360000}-\sum_{i=1}^{30}(s+ik)=120000$$

$$360000-\left[30s+k\frac{30(30+1)}{2}\right]=120000$$

$$-30s-465k=-240000$$

Tomado las dos ecuaciones;

$$40s+820k=360000 \qquad (3)$$

$$30s+465k=240000 \qquad (4)$$

3*(3) –4* (4) $(820 * 3 - 4 * 465)k = 3 * 360000 - 4 * 240000$

$(600)k = 120000$

$k = 200 \Rightarrow s = 4900$

10) Las progresiones geométricas son de la siguiente forma:

$$(a)+(ar)+(ar^2)+\ldots+(ar^n)=a\sum_{i=0}^{n} r^i = a\left[\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right]$$

$ar^3 = 54$

$ar^6 = \dfrac{729}{4}$

Resolviendo:

$a = 54r^{-3}$

$(54r^{-3})r^6 = \dfrac{729}{4}$

$54r^3 = \dfrac{729}{4}$

$r = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = 16$

$$a\sum_{i=0}^{n} r^i = 16\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^i$$

11.Siendo

$$S_j = \sum_{n=0}^{\infty} j\left(\frac{1}{j+1}\right)^n \qquad j = 1,2,3,\ldots,n$$

demostrar $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{n(n+3)}{2}$

Solución:

Considere que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

Para *r<1.*

$$S_j = \sum_{n=0}^{\infty} j\left(\frac{1}{j+1}\right)^n = j\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{j+1}\right)^n = j\left[\frac{1}{1-\frac{1}{j+1}}\right] = j\left[\frac{1}{\frac{j}{j+1}}\right] = j+1$$

$$S_j = j+1$$

Ahora, debemos calcular:

$$\sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n}(j+1) = \sum_{j=1}^{n} j + n$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\sum_{j=1}^{n} S_j - \frac{n(n+3)}{2}$$

12.En una P.G de 50 términos se sabe que el cuarto término es (-40) y que el séptimo es 320 .Hallar el décimo término ,la suma y el producto de los términos de posición impar.

Solución:

10) Las progresiones geométricas son de la siguiente forma:

$$(a)+(ar)+(ar^2)+\ldots+(ar^n)=a\sum_{i=0}^{n} r^i = a\left[\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right]$$

$$ar^3 = -40$$
$$ar^6 = 320$$

Resolviendo:

$$a = -40r^{-3}$$
$$(-40r^{-3})r^6 = 320$$
$$-40r^3 = 320$$
$$r^3 = -8$$
$$r = -2 \Rightarrow a = 5$$

El décimo termino es igual a $ar^9 = 5*(-2)^9 = -2560$

$$a\sum_{i=0}^{n} r^{i} = 5\sum_{i=0}^{n}(-2)^{i} = 5\left[\frac{1-(-2)^{n+1}}{1--2}\right] = \frac{5}{3}\left(1-(-2)^{n+1}\right)$$

14.Simplificar y calcular

$$\frac{7!}{5!},\frac{12!}{14!},\binom{8}{5},\binom{8}{3},\binom{15}{12},\binom{13}{7},\binom{8}{4}+2\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$$

$$\binom{19}{15}+2\binom{19}{16}+\binom{19}{17},\sum_{k=1}^{5}\binom{8}{k},\sum_{k=1}^{92}\binom{98}{k},\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k}$$

Solución:

Usando que,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k}$$

Simplificar y calcular.

Resolveremos los más difíciles, pues en los demás se puede utilizar la calculadora facilmente.

$$\sum_{k=1}^{92}\binom{98}{k} = \binom{98}{1}+\binom{98}{2}+\binom{98}{3}+\cdots+\binom{98}{91}+\binom{98}{92}$$

Pero sabemos que,

$$2^{98} = (1+1)^{98} = \sum_{k=0}^{98}\binom{98}{k} = \binom{98}{0}+\binom{98}{1}+\binom{98}{2}+\cdots+\binom{98}{97}+\binom{98}{98}$$

$$2^{98} \quad = \binom{98}{0}+\binom{98}{1}+\binom{98}{2}+\cdots+\binom{98}{97}+\binom{98}{98}$$

Ahora, restemos a la ultima ecuación los terminos que no estan en la primera sumatoria.

$$2^{98} \quad -\binom{98}{93}-\binom{98}{94}-\binom{98}{95}-\binom{98}{96}-\binom{98}{97}-\binom{98}{98}$$
$$= \binom{98}{1}+\binom{98}{2}+\cdots+\binom{98}{91}+\binom{98}{92}$$

$$2^{98} - \binom{98}{93} - \binom{98}{94} - \binom{98}{95} - \binom{98}{96} - \binom{98}{97} - \binom{98}{98} = \sum_{k=1}^{92} \binom{98}{k}$$

<u>Resover (ultimo)</u>,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Si consideramos, a=2 y b=1

$$(2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

La unica diferecia con nuestra primera ecuación, es que una parte desde 1 y la otra desde cero. Consideremos la ultima ecuación y separemos el primer termino.

$$3^n - \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - \binom{n}{0}$$

15.Simplificar

$$\frac{(n+2)!}{n!} \quad , \frac{n! - (n-1)!}{(n-1)!} , \quad \binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n} , \quad \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{3}}$$

Solución:

a)

$$\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$$

b)

$$\frac{n! - (n-1)!}{(n-1)!} - \frac{(n-1)!\,(n-1)}{(n-1)!} - (n-1)$$

c)

$$\frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n+1)!}{3!\,(n-2)!}}{\frac{n!}{3!\,(n-3)!}} = \frac{3!\,(n-3)!\,(n+1)!}{3!\,(n-2)!\,n!} = \frac{(n+1)}{(n-2)}$$

d)

$$\binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n} = \left(\frac{[4n]!}{[3n]!\,[n]!}\right)\left(\frac{[3n]!}{[2n]!\,[n]!}\right)\left(\frac{[2n]!}{[n]!\,[n]!}\right)$$

$$\binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n} = \left(\frac{[4n]!}{[n]!^4}\right)$$

16.Calcular n

$$\binom{n}{2} = 55 \quad , \quad \binom{n}{n-2} = 10\,, \quad \binom{n}{3} = \binom{n}{5}$$

Solución:

a)

$$\binom{n}{2} - 55$$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 55$$

$$(n)(n-1) = 110$$

$$n = 11$$

b)

$$\binom{n}{n-2} = 10$$

$$\frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 10$$

$(n)(n-1)=20$

$n=5$

c)

$\binom{n}{3}=\binom{n}{5}$

$\frac{n!}{3!\,(n-3)!}=\frac{n!}{5!(n-5)!}$

$5!=\frac{3!}{(n-5)!}(n-3)!$

$5!=3!(n-3)(n-4)$

$\frac{5!}{3!}=(n-3)(n-4)$

$20=n^2-7n+12$

$0=n^2-7n-8$

$0=(n-8)(n+1)$

17.Desarrollar

$(3x+2y)^6,\quad (1-x)^7,\quad \left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^6,\quad \left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5$

Solución:

Usando que,

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

a)

$$(3x+2y)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(3x)^k(2y)^{6-k}$$

$$(3x+2y)^6=\binom{6}{0}(3x)^0(2y)^{6-0}+\binom{6}{1}(3x)^1(2y)^{6-1}+\cdots+\binom{6}{6}(3x)^6(2y)^{6-6}$$

b)

$$(1-x)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(-x)^k(1)^{6-k}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(-x)^k$$

$$(1-x)^7=\binom{7}{0}(-x)^0+\binom{7}{1}(-x)^1+\cdots+\binom{7}{7}(-x)^6$$

$$(1-x)^7=\binom{7}{0}-\binom{7}{1}(x)^1+\cdots+\binom{7}{7}(x)^6$$

c)

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{6-k}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{\frac{k}{3}}(x^{-1})^{6-k}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{5}\binom{6}{k}x^{\frac{k}{3}}x^{k-6}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{\frac{4k}{3}-6}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)^6=\binom{6}{0}x^{-6}+\binom{6}{1}x^{\frac{4}{3}-6}+\cdots+\binom{6}{6}x^{\frac{24}{3}-6}$$

d)

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(x^3)^k\left(-\frac{1}{x}\right)^{5-k}$$

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{3k}(-x^{-1})^{5-k}$$

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{3k}x^{k-5}(-1)^{5-k}$$

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{4k-5}\quad(-1)^{5-k}$$

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^5=\binom{5}{0}x^{-5}\quad(-1)^5+\binom{5}{1}x^{4-5}\quad(-1)^4+\cdots+\binom{5}{5}x^{20-5}\quad(-1)^0$$

18.Encontrar los coeficientes de los términos indicados en los desarrollados correspondientes.

i) $x^{11} en : (3x+2x^2)^7$ ii) $x^2 en : (\sqrt[3]{x}-2/x^2)^{27}$ iii) $x^5 en : \left(2x-\frac{3}{x}\right)^{13}$

iv) $x^{2r} en : (1-x^2)^{4r}$

Solución:

a)

$$\left(3x+2x^2\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\left(2x^2\right)^k(3x)^{7-k}$$
$$\left(3x+2x^2\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k x^{2k}x^{7-k}3^{7-k}$$
$$\left(3x+2x^2\right)^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k 3^{7-k}x^{7+k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al $x^{11}$, basta igualar el exponente del $x^{7+k}$ a 11.

$7+k=11$
$k=4$

Entonces, para $k=4$ encontraremos el coeficiente que acompaña a $x^{11}$.

$$\binom{7}{4}2^4 3^{7-4}x^{7+4}=\binom{7}{4}2^4 3^3 x^{11}$$

$$Coef=\binom{7}{4}2^4 3^3$$

b)

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{27}=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{k}\left(2x^{-2}\right)^{27-k}$$

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{27}=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}2^{27-k}x^{\frac{k}{3}}x^{-54+2k}$$

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{27}=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}2^{27-k}x^{-54+2k+\frac{k}{3}}$$

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{27}=\sum_{k=0}^{27}\binom{27}{k}2^{27-k}x^{-54+\frac{7k}{3}}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al $x^2$, basta igualar el exponente de $x^{-54+\frac{7k}{3}}$ a 2.

$$-54+\frac{7k}{3}=2$$
$$k=24$$

Entonces, para $k=24$ encontraremos el coeficiente que acompaña a $x^2$.

$$\binom{27}{24}2^{27-24}x^{-54+\frac{7*24}{3}}$$
$$Coef=\binom{27}{24}2^{3}$$

c) Es análogo a los dos anteriores.

d)

$$\left(1-x^2\right)^{4r}=\sum_{k=0}^{4r}\binom{4r}{k}\left(-x^2\right)^{k}(1)^{4r-k}$$

$$\left(1-x^2\right)^{4r}=\sum_{k=0}^{4r}\binom{4r}{k}(-1)^{k}x^{2k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente que acompaña al $x^{2r}$, basta igualar el exponente de $x^{2k}$ a 2r.

$$2k = 2r$$
$$k = r$$

Entonces, para $k = r$ encontraremos el coeficiente que acompaña a $x^{2r}$.

$$\binom{4r}{r}(-1)^r x^{2r}$$

$$Coef = \binom{4r}{r}(-1)^r$$

19. Encuentre los términos centrales en el desarrollo de

a) $\left(3a - \frac{6}{a}\right)^{10}$

$$\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{-6}{a}\right)^k (3a)^{10-k}$$
$$\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-6)^k a^{-k} a^{10-k} 3^{10-k}$$
$$\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-6)^k 3^{10-k} a^{10-2k}$$

Como nos piden encontrar el termino central del desarrollo del binomio $\left(3a-\frac{6}{a}\right)^{10}$, basta tomar el $k = 5$, pues la sumatoria va desde 0 a 10 siendo el termino central el $k = 5$.

Entonces, el término central es igual a:

$$\binom{10}{5}(-6)^5 3^{10-5} a^{10-2*10} = \binom{10}{5}(-6)^5 3^5 = \binom{10}{5}(-18)^5 = -\binom{10}{5}(18)^5$$

b) $\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x}\right)^5$

$$\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\frac{-5}{2x}\right)^k\left(\frac{4x}{5}\right)^{5-k}$$

$$\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\frac{-5}{2}\right)^k x^{-k}\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} x^{5-k}$$

$$\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left(\frac{-5}{2}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} x^{5-2k}$$

Como nos piden encontrar el termino central del desarrollo del binomio $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^5$, basta tomar el $k=2$ y el $k=3$ , pues la sumatoria va desde 0 a 5 existiendo dos términos centrales, debido a que son 6 términos los del desarrollo.

Entonces, el término central es igual a:

$$Ter\min o=\binom{5}{2}\left(\frac{-5}{2}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{5-2} x^{5-2*2}+\binom{5}{3}\left(\frac{-5}{2}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^{5-3} x^{5-2*3}$$

$$=\binom{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 x-\binom{5}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 x^{-1}$$

$$=\binom{5}{2}\left(\frac{4^2}{5}\right)x-\binom{5}{3}10x^{-1}$$

c) $\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right)^{24}$ , con $0<a<b$

$$\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right)^{24} = \sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}\left(\sqrt{a-x}\right)^k\left(\sqrt{b-x}\right)^{24-k}$$

$$\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right)^{24} = \sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}\left(\sqrt{a-x}\right)^k\left(\sqrt{b-x}\right)^{24-k}$$

Como nos piden encontrar el termino central del desarrollo del binomio $\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right)^{24}$ , basta tomar el $k=12$ , pues la sumatoria va desde 0 a 24 siendo el termino central el $k=12$ .

Entonces, el término central es igual a:

$$Ter\min o=\binom{24}{12}\left(\sqrt{a-x}\right)^{12}\left(\sqrt{b-x}\right)^{24-12}$$

$$=\binom{24}{12}(a-x)^{6}(b-x)^{6}$$

20. Encontrar el término independiente de x en el desarrollo.

a) $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$

$$\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{-1}{3x}\right)^k\left(\frac{3x^2}{2}\right)^{9-k}$$

$$\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{-1}{3}\right)^k x^{-k}\left(\frac{3}{2}\right)^{9-k}x^{18-2k}$$

$$\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\left(\frac{3}{2}\right)^{9-k}x^{18-3k}$$

Como nos piden encontrar el termino independiente de x del binomio $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$,

basta igualar a cero el exponente de $x^{18-3k}$, pues el termino independiente de x esta elevado a la cero.

$$18-3k=0$$
$$k=6$$

Entonces, el término independiente es:

$$\text{Termino(indepen)}=\binom{9}{6}\left(\frac{-1}{3}\right)^6\left(\frac{3}{2}\right)^{9-6}x^{18-3*6}$$

$$=\binom{9}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$=\binom{9}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

a) $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^{k}(x)^{3n-k}$$
$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(-1)^{k}x^{-2k}x^{3n-k}$$
$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(-1)^{k}x^{3n-3k}$$

Como nos piden encontrar el termino independiente de x del binomio $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$,

basta igualar a cero el exponente de $x^{3n-3k}$, pues el termino independiente de x esta elevado a la cero.

$$3n-3k=0$$
$$k=n$$

Entonces, el término independiente es:

$$\text{Termino(indepen)}=\binom{3n}{n}(-1)^{n}x^{3n-3n}$$
$$=\binom{3n}{n}(-1)^{n}$$

21. Calcular el valor numérico del término independiente de x.

$$\left(3x^{65}+2\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$$

Solución:

$$\left(3x^{65}+2\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}=\left(3x^{65}+2\right)\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^{k}(x)^{3n-k}$$
$$\left(3x^{65}+2\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}=\left(3x^{65}+2\right)\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(-1)^{k}x^{-2k}x^{3n-k}$$
$$\left(3x^{65}+2\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}3(-1)^{k}x^{3n-3k+65}+\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}2(-1)^{k}x^{3n-3k}$$

Como nos piden encontrar el termino independiente de x del binomio

$\left(3x^{65}+2\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$, basta igualar a cero el exponente de $x^{3n-3k+65}$ y el de

$x^{3n-3k}$, pues por cada sumatoria podría existir un termino independiente de x.

Para la primera sumatoria:

$$3n-3k+65=0$$
$$k=n+\frac{65}{3}$$

Como el $k$ no es un número entero positivo, implica que ese término no existe.

Para la segunda sumatoria:

$$3n-3k=0$$
$$k=n$$

Entonces, el término independiente es:

$$\text{Termino(indepen)}=\binom{3n}{n}2(-1)^n x^{3n-3n}$$
$$=\binom{3n}{n}2(-1)^n$$

Es decir, la primera sumatoria no aporta nada.

22. Calcular el coeficiente de $x^{-2}$ en el desarrollo de x: $x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{28}$

$$x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{28}=x^2\sum_{k=0}^{28}\binom{28}{k}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^k\left(x^2\right)^{28-k}$$
$$x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{28}=x^2\sum_{k=0}^{28}\binom{28}{k}(-1)^k x^{-2k}x^{56-2k}$$
$$x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{28}=x^2\sum_{k=0}^{28}\binom{28}{k}(-1)^k x^{56-4k}$$
$$x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{28}=\sum_{k=0}^{28}\binom{28}{k}(-1)^k x^{58-4k}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente de $x^{-2}$ del binomio $x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{28}$, basta igualar a -2 el exponente de $x^{58-4k}$ , lo que permitirá conocer el k necesario para encontrar el coeficiente

$$58-4k=-2$$
$$k=15$$

Entonces, el coeficiente de $x^{-2}$

$$Ter\min o=\binom{28}{15}(-1)^{15}x^{58-4*15}$$
$$=-\binom{28}{15}x^{-2}$$
$$Coef=-\binom{28}{15}$$

23. Determinar el valor de *a* para los coeficientes de $x^7$ y $x^6$ en el desarrollo de:

$(x+a)^5(x-2a)^3$ sean iguales.

Solución:

$$(x+a)^5(x-2a)^3=(x-2a)^3\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{5-k}$$
$$(x+a)^5(x-2a)^3=\left[x^3-6ax^2+12a^2x-8a^3\right]\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{5-k}$$
$$=x^3\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{5-k}-6ax^2\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{5-k}+12a^2x\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{5-k}-8a^3\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{5-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{k+3}a^{5-k}-6\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{k+2}a^{6-k}+12\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{k+1}a^{7-k}-8\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ka^{8-k}$$

- Tenemos cuatro sumatoria que nos aportaran coeficientes para $x^7$ y $x^6$.

- Como nos piden encontrar el coeficiente de $x^6$ del binomio $(x+a)^5(x-2a)^3$, basta igualar a 6 el exponente de $x^{k+3}$, $x^{k+2}$, $x^{k+1}$ y $x^k$ , lo que permitirá conocer el k necesario para encontrar el coeficiente de cada sumaria:

Primera sumatoria:

$$k+3=6$$
$$k=3$$

$$Coef_1 = \binom{5}{3} a^{5-3} = \binom{5}{3} a^2$$

Segunda sumaria

$$k+2=6$$
$$k=4$$

$$Coef_2 = -6\binom{5}{4} a^{6-4} = -6\binom{5}{4} a^2$$

Tercera sumaria

$$k+1=6$$
$$k=5$$

$$Coef_3 = 12\binom{5}{5} a^{7-5} = 12\binom{5}{5} a^2$$

Cuarta sumaria

$$k=6$$

No aporta nada, debido a que el mayor valor que puede tomar k es 5.

$$Coef_6 = Coef_1 + Coef_2 + Coef_3$$
$$Coef_6 = \binom{5}{3} a^2 - 6\binom{5}{4} a^2 + 12\binom{5}{5} a^2$$
$$Coef_6 = 10a^2 - 30a^2 + 12a^2$$
$$Coef_6 = -8a^2$$

- Como nos piden encontrar el coeficiente de $x^7$ del binomio $(x+a)^5(x-2a)^3$, basta igualar a 7 el exponente de $x^{k+3}$, $x^{k+2}$, $x^{k+1}$ y $x^k$, lo que permitirá conocer el k necesario para encontrar el coeficiente de cada sumaria:

Primera sumatoria:

$$k+3=7$$
$$k=4$$

$$Coef_1 = \binom{5}{4} a^{5-4} = \binom{5}{4} a$$

Segunda sumaria

$$k+2=7$$
$$k=5$$

$$Coef_2=-6\binom{5}{5}a^{6-5}=-6\binom{5}{5}a$$

Tercera sumaria

$$k+1=7$$
$$k=6$$

No aporta nada, debido a que el mayor valor que toma k es 5.

Cuarta sumaria

$$k=7$$

No aporta nada, debido a que el mayor valor que toma k es 5.

$$Coef_7=Coef_1+Coef_2+$$
$$Coef_7=\binom{5}{4}a-6\binom{5}{5}a$$
$$Coef_7=5a-6a$$
$$Coef_7=-a$$

Ahora, igualando el $Coef_7$ a $Coef_6$.

$$Coef_6=Coef_7$$
$$-8a^2=-a$$
$$a(8a-1)=0$$

Es decir, para $a_1=0 \wedge a_2=\dfrac{1}{8}$ los coeficientes de $x^7$ y $x^6$ son iguales.

24. Hallar el coeficiente de $x^7$ en el desarrollo de: $\left(1-x^2-x^3\right)^n$

Desarrollo:

$$\left(1-x^2(1+x)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-x^2(1+x)\right)^k 1^{n-k}$$

$$\left(1-x^2(1+x)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}(1+x)^k$$

$$\left(1-x^2(1+x)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i$$

$$\left(1-x^2(1+x)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i$$

Para la sumatoria que depende de i, los términos que dependen de k son constantes.

$$\left(1-x^2(1+x)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}(-1)^k x^{2k+i}$$

Como nos piden encontrar el coeficiente de $x^7$ del polinomio $\left(1-x^2-x^3\right)^n$, basta igualar a 7 el exponente de $x^{2k+i}$, de esa manera conoceremos los posibles valores que pueden tomar k e i.

$2k+i=7$

Con las siguientes restricciones,

$0\le i\le k\le n$

Ahora,

$k=0\Rightarrow i=7\Rightarrow\Leftarrow$ Debido a que $i\le k$

$k=1\Rightarrow i=5\Rightarrow\Leftarrow$ Debido a que $i\le k$

$k=2\Rightarrow i=3\Rightarrow\Leftarrow$ Debido a que $i\le k$

$k=3\Rightarrow i=1$ Este caso cumple con $0\le i\le k\le n$

$k=4\Rightarrow i=-1\Rightarrow\Leftarrow$ Debido a que $0\le i\le k\le n$

Luego, la única solución es con $k=3\Rightarrow i=1$

$$coef = \binom{n}{3}\binom{3}{1}(-1)^3$$

$$coef = -\binom{n}{3}\binom{3}{1}$$

25.

i) $\sum_{k=0}^{144} k \cdot \binom{144}{k}$

Desarrollo:

$$\sum_{k=0}^{423}\binom{423}{k} = \sum_{k=0}^{423}\binom{423}{k}1^k 1^{423-k}$$

$$\sum_{k=0}^{423}\binom{423}{k} = (1+1)^{423}$$

$$\sum_{k=0}^{423}\binom{423}{k} = 2^{423}$$

ii) $\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\binom{1012}{k}$

Desarrollo:

$$\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\binom{1012}{k} = \sum_{k=0}^{1012}\binom{1012}{k}(-1)^k 1^{1012-k}$$

$$\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\binom{1012}{k} = (1-1)^{1012}$$

$$\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\binom{1012}{k} = 0$$

iii) $\sum_{k=0}^{144} k \cdot \binom{144}{k}$

Desarrollo:

$$\sum_{k=1}^{144} k\cdot\binom{144}{k}=\sum_{k=1}^{144} k\cdot\frac{144!}{k!\cdot(144-k)}$$
$$=\sum_{k=1}^{144}\frac{144!}{(k-1)!\cdot(144-k)}$$
$$=\sum_{k=1}^{144}\frac{144!}{(k-1)!\cdot(144-k+1-1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{144}\frac{144!}{(k-1)!\cdot(143-k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{144}\frac{144!}{(k-1)!\cdot(143-(k-1))}$$
$$=\sum_{k=1}^{144}\frac{143!\cdot 144}{(k-1)!\cdot(143-(k-1))}$$
$$=144\sum_{k=1}^{144}\frac{143!}{(k-1)!\cdot(143-(k-1))}$$
$$=144\sum_{k=1}^{144}\binom{143}{k-1}$$

$$=144\cdot\left(\binom{143}{0}+\binom{143}{1}+\binom{143}{2}+\ldots+\binom{143}{142}+\binom{143}{143}\right)$$
$$=144\sum_{k=0}^{143}\binom{143}{k}$$
$$=144\sum_{k=0}^{143}\binom{143}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{143-k}$$
$$=144\cdot(1+1)^{143}$$
$$=144\cdot 2^{143}$$

iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{1998}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot\binom{1998}{k}$

Desarrollo:

Multiplicaremos por 1, para reordenar la combinatoria.

$$\sum_{k=0}^{1998}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot\binom{1998}{k}=\sum_{k=0}^{1998}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot\binom{1998}{k}\frac{1999\cdot 2000}{1999\cdot 2000}$$
$$=\sum_{k=0}^{1998}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{1998!}{k!\cdot(1998-k)!}\frac{1999\cdot 2000}{1999\cdot 2000}$$
$$=\sum_{k=0}^{1998}\frac{2000!}{(k+2)!\cdot(1998-k)!}\frac{1}{1999\cdot 2000}$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\sum_{k=0}^{1998}\frac{2000!}{(k+2)!\cdot(1998-k-2+2)!}$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\sum_{k=0}^{1998}\frac{2000!}{(k+2)!\cdot(2000-(k+2))!}$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\sum_{k=0}^{1998}\binom{2000}{k+2}$$

$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[\binom{2000}{2}+\binom{2000}{3}+\binom{2000}{4}+\binom{2000}{5}+\ldots+\binom{2000}{1999}+\binom{2000}{2000}\right]$$

Ahora, sumemos cero dentro del paréntesis.

$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[\binom{2000}{2}+\binom{2000}{3}+\ldots+\binom{2000}{2000}+\overbrace{\binom{2000}{0}-\binom{2000}{0}}^{=0}+\underbrace{\binom{2000}{1}-\binom{2000}{1}}_{=0}\right]$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[\binom{2000}{0}+\binom{2000}{1}+\binom{2000}{2}+\ldots+\binom{2000}{1999}+\binom{2000}{2000}-\binom{2000}{0}-\binom{2000}{1}\right]$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[\sum_{k=0}^{2000}\binom{2000}{k}-\binom{2000}{0}-\binom{2000}{1}\right]$$

$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[\sum_{k=0}^{2000}\binom{2000}{k}1^k\cdot 1^{2000-k}-\binom{2000}{0}-\binom{2000}{1}\right]$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[(1+1)^{2000}-\binom{2000}{0}-\binom{2000}{1}\right]$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[2^{2000}-\binom{2000}{0}-\binom{2000}{1}\right]$$
$$=\frac{1}{1999\cdot 2000}\left[2^{2000}-2001\right]$$

26. Determine:

i) $a_7$ en $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 6n$

Desarrollo:

Partamos con algo conocido,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$$

Sumemos a toda la ecuación 5n.

$$\sum_{k=1}^{n} 2k + 5n = n^2 + n + 5n$$
$$\sum_{k=1}^{n} 2k + 5\sum_{k=1}^{n} 1 = n^2 + 6n$$
$$\sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 5 = n^2 + 6n$$
$$\sum_{k=1}^{n} 2k + 5 = n^2 + 6n$$

Por enunciado,

$$\sum_{k=1}^{n} 2k + 5 = n^2 + 6n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$a_k = 2k + 5$$
$$a_7 = 19$$

ii) $t_7$ en $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2x}{y}\right)^7$

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2x}{y}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k\left(\frac{2x}{y}\right)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} t_k$$

$$t_k = \binom{7}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k\left(\frac{2x}{y}\right)^{7-k}$$

$$t_7 = \binom{7}{7}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^7\left(\frac{2x}{y}\right)^{7-7} \Rightarrow t_7 = x^{\frac{7}{3}}$$

iii) $t_5$ en $\left(\dfrac{4x^3}{5}+\dfrac{2}{3x^2}\right)^{20}$

$$\left(\frac{4x^3}{5}+\frac{2}{3x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\left(\frac{4x^3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{3x^2}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} t_k$$

$$t_k = \binom{20}{k}\left(\frac{4x^3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{3x^2}\right)^{20-k}$$

$$t_5 = \binom{20}{5}\left(\frac{4x^3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{3x^2}\right)^{20-5}$$

$$t_5 = \binom{20}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{15}\frac{1}{x^{15}}$$

iv) $t_5$ en $(2x-y)^{12}$

$$(2x-y)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-y)^k (2x)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} t_k$$

$$t_k = \binom{12}{k} (-y)^k (2x)^{12-k}$$

$$t_5 = \binom{12}{5} (-y)^5 (2x)^{12-5}$$

$$t_7 = -\binom{12}{5} y^5 (2x)^7$$