Segundo Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2009

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes

1. Demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0$$

Solución:

La proposición $P(n) : 2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0$ es cierta, para $n = 1$, de hecho

$$2 \times 1^3 - 9 \times 1^2 + 13 \times 1 + 25 = 31 \geq 0$$

0,5 puntos

Supongamos que $P(n)$ es cierto, esto es, estamos suponiendo que

$$2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0.$$

0,5 puntos

Notamos que

$$\begin{aligned} 2(n+1)^3 - 9(n+1)^2 + 13(n+1) + 25 &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 9(n^2 + 2n + 1) + 13(n+1) + 25 = \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 9n^2 - 18n - 9 + 13n + 13 + 25 = \\ &= (2n^3 - 9n^2 + 13n + 25) + 6n^2 - 12n + 6 = \\ &= (2n^3 - 9n^2 + 13n + 25) + 6(n^2 - 2n + 1) = \\ &= (2n^3 - 9n^2 + 13n + 25) + 6(n-1)^2 \end{aligned}$$

3 puntos

El cuadrado de un número es no negativo, por tanto se tiene que

$$(n - 1)^2 \geq 0$$

Lo que a su vez implica que:

$$6(n - 1)^2 \geq 0$$

1 punto

Por lo tanto:

$$(2n^3 - 9n^2 + 13n + 25) + 6(n - 1)^2 \geq 2n^3 - 9n^2 + 13n + 25$$

Por hipótesis inductiva se tiene que:

$$2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0$$

Por lo tanto:

$$(2n^3 - 9n^2 + 13n + 25) + 6(n - 1)^2 \geq 2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0$$

Así se tiene que:

$$2(n+1)^3 - 9(n+1)^2 + 13(n+1) + 25 = (2n^3 - 9n^2 + 13n + 25) + 6(n-1)^2 \geq 2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0$$

Es decir, $P(n + 1)$ es cierta, entonces por inducción hemos probado que

$$2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

1 punto

2. El siguiente *Triángulo de números impares* se construye poniendo en la cúspide al 1, en la siguiente fila se escriben el 3 y el 5, para luego en la tercera fila escribir el 7, el 9 y el 11.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \quad 5 \\ 7 \quad 9 \quad 11 \end{array}$$

Así sucesivamente, cada vez que está construida la fila n , la fila $n + 1$ tiene un elemento más que los que tiene la fila n , y el primer elemento de la fila $n + 1$ es el impar consecutivo del último impar de la fila n . Utiliza el símbolo de sumatoria para describir la suma de todos los elementos de la fila n . (**Note que no se pide que calcule el valor de la suma**)

Solución:

Primero notar que como la primera fila tiene 1 elemento y cada fila tiene un elemento más que la anterior, entonces la fila n -ésima tiene n elementos.

1 punto

Afirmación: El primer término de la fila n -ésima es $1 + n(n - 1)$ y el último es $n(n + 1) - 1$

De hecho: el primer término de la primera fila es $1 = 1 + 1 \times 0$ y el último término de la primera fila es $1 = 1 \times 2 - 1$.

Supongamos que el primer término de la fila n -ésima es $1 + n(n - 1)$ y el último es $n(n + 1) - 1$. Por lo tanto el impar siguiente a $n(n + 1) - 1$ es el primero de fila $n + 1$. Pero el siguiente impar de $n(n + 1) - 1$ es $n(n + 1) - 1 + 2 = 1 + (n + 1)n$.

Como la fila $(n + 1)$ -ésima tiene $n + 1$ términos, el último término de la fila n -ésima es

$$n(n+1)+1+\underbrace{2+2+2+\dots+2}_{n \text{ veces}} = n(n+1)+2n+1 = n(n+1)+2(n+1)-1 = (n+1)(n+2)-1$$

Luego, por inducción hemos demostrado que la afirmación es cierta.

Además $n(n - 1) + 2(n - 1) + 1 = n(n + 1) - 1$,

4 puntos

luego la suma que buscamos es:

$$\sum_{k=0}^{n-1} n(n-1) + 2k + 1$$

1 punto