Primer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2008

Tiempo:20 minutos.
Nombre:

Resuelve sólo un problema entre los siguientes.

1. Demuestra que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} \geq \frac{1}{2}$$

Solución: Observar primero que si $1 \leq k \leq 2^n$ se tiene

$$\frac{1}{2^n + k} \geq \frac{1}{2^n + 2^n}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} \geq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + 2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} 1 = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{4 puntos}}$$

2. Sea $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, muestra que

$$\sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2k - 1 = m^3$$

Solución:

$$\sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2k-1 = \sum_{k=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2k-1 - \sum_{k=1}^{\frac{m(m-1)}{2}} 2k-1$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como $\sum_{i=1}^{p} 2i-1 = p^2$ se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2k-1 - \sum_{k=1}^{\frac{m(m-1)}{2}} 2k-1 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} - \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

$$= \frac{m^2}{4}((m+1)^2 - (m-1)^2) = \frac{m^2}{4}(4m) = m^3$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Nota: Para los que intenten hacer inducción en alguno de los problemas, dar 1 punto por comprobar el caso 1. Y dar un punto por suponder el caso n y traducir esto correctamente. Sin embargo, descontar medio punto en el caso en que al comprobar el caso $n = 1$ suponen como cierto lo que tienen que comprobar.