Primer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2007

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes

1. Muestra que la suma de todos los números impares entre n^2+n y n^2+3n es $n^2(n+2)$.

   (Ayuda: Notar que $n^2+n = n(n+1)$ y $n^2+3n = n(n+3)$)

2. Muestra que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

Solución 1:

Notar primero que tanto n^2+n como n^2+3n son números pares, por lo tanto el primer sumando de nuestra suma es n^2+n+1 y el último es n^2+3n-1,

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

por lo tanto la suma es:

$$\sum_{k=0}^{n-1} n^2+n+2k+1$$

$$\boxed{\text{3 punto}}$$

que es igual a

$$\sum_{k=0}^{n-1} n^2+n+2\sum_{k=0}^{n-1} k+\sum_{k=0}^{n-1} 1 =$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

$$(n^2+n)n+n(n-1)+n=$$
$$n(n^2+n+n-1+1)=n(n^2+2n)=n^2(n+2) \qquad \square$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Solución 2:

<u>Inducción sobre n.</u>

Comprobemos que la proposición

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

es cierta para $n=1$. En este caso se tiene:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Entonces la proposición es cierta para $n=1$.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Supongamos que la proposición es cierta para n, es decir

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}, \qquad \text{es cierto}$$

Consirderemos la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k}$, esta suma es:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+1}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

$$=\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k}-\frac{1}{2(n+1)(2n+3)}$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Es decir

$$\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}-\frac{1}{2(n+1)(2n+3)}<\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}\leq\frac{5}{6}$$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

Por lo tanto la proposición es cierta para $n+1$. Así hemos demostrado que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}\leq\frac{5}{6}$$

$\boxed{\text{0,5 puntos}}$