

Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Julio, 2008

Tiempo: 20 minutos.

Nombre: _____

Elije sólo un problema.

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$. ¿ Es f diferenciable?

Solución:

Si $x \in (0, \infty)$, entonces $f(x) = x^2$, por lo tanto $f'(x) = 2x$. Luego f es diferenciable en $(0, \infty)$.

1,5 puntos

Si $x \in (-\infty, 0)$, entonces $f(x) = -x^2$, por lo tanto $f'(x) = -2x$. Luego f es diferenciable en $(-\infty, 0)$.

1,5 puntos

Si $x = 0$, entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

Luego f es diferenciable en cero y su derivada es cero. Por lo tanto f es diferenciable en \mathbb{R} .

3 puntos

Observación 0.1 *Notar que si pensamos*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y afirmamos

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y afirmamos que f es diferenciable. Es un error conceptual importante, por ejemplo si aplicamos el mismo criterio para:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se cae estrepitosamente a pedazos.

2. Si la posición de un móvil que se mueve en línea recta está modelada por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \text{sen}(2t)$, donde t es el tiempo medido en segundos y f está medido en metros. ¿Cuál es la velocidad del móvil en $t = \pi$ [s]?

Una Solución:

La derivada de f en $t = \pi$ representa la velocidad del móvil, medida en m/s .

$$f'(t) = 2 \cos(2t) \text{ m/s}$$

3 puntos

$$f'(\pi) = 2 \cos(2\pi) = 2 \text{ m/s}$$

3 puntos

La velocidad del móvil en $t = \pi$ [s] es 2 m/s .

Si alguien hace esto asignar como puntaje mximo solamente 3 puntos.

3 puntos

Otra Solución:

La derivada de f en $t = \pi$ representa la velocidad del móvil, medida en m/s .

$$f(t) = 2 \cos(t) \sin(t)$$

2 puntos

$$f'(t) = 2(\cos(t) \cos(t) - \sin(t) \sin(t))$$

2 puntos

$$f'(\pi) = 2(\cos^2(\pi) - \sin^2(\pi)) = 2 \text{ m/s}$$

La velocidad del móvil en $t = \pi$ [s] es 2 m/s .

2 puntos

Observación 0.2 Si alguien usa la regla de la cadena mal, es decir, dice $f'(t) = \cos(2t)$ asignar puntaje mínimo, es decir cero puntos. Ese estudiante tiene nota 1.