

Pauta Control 11 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 10 de Mayo, 2010

Tiempo : 15 minutos .

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - 3x$ y $U = (5 - 10^{-5}, 5 + 10^{-5})$.
Indique una vecindad V de -1 que cumpla la propiedad:

$$x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

Justifique su respuesta.

Solución:

Notar que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 5$. Luego dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (-1 - \delta, -1 + \delta)$ entonces $f(x) \in (5 - \epsilon, 5 + \epsilon)$. En particular para $\epsilon = 10^{-5}$, existe $\delta = \frac{10^{-5}}{3}$ tal que si $x \in \left(-1 - \frac{10^{-5}}{3}, -1 + \frac{10^{-5}}{3}\right)$ entonces $f(x) \in (5 - 10^{-5}, 5 + 10^{-5})$. Por tanto una vecindad V de -1 que cumpla la propiedad es $V = \left(-1 - \frac{10^{-5}}{3}, -1 + \frac{10^{-5}}{3}\right)$.

2. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x) - \sin(7x)}{x^2}$? Justifique su respuesta.

Solución:

Si, el límite existe. En efecto notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\tan(7x) - \sin(7x)}{x^2} &= \frac{\sin(7x) \left(\frac{1}{\cos(7x)} - 1 \right)}{x^2} \\ &= \frac{\sin(7x)}{x} \left(\frac{1 - \cos(7x)}{x \cos(7x)} \right) \\ &= \frac{\sin(7x)}{7x} \left(\frac{1 - \cos(7x)}{7x} \right) \frac{49}{\cos(7x)} \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{7x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{7x} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{49}{\cos(7x)} = 49$.

Luego por algebra de límites, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x) - \sin(7x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{7x} \left(\frac{1 - \cos(7x)}{7x} \right) \frac{49}{\cos(7x)} = 1 \times 0 \times 49 = 0$$