Trigonometría

Formulas Trigonométricas:

$\cos^2(x) + sen^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

$sen^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp sen(x)sen(y)$

$sen(x \pm y) = sen(x)\cos(y) \pm \cos(x)sen(y)$

$sen(2x) = 2sen(x)\cos(y)$

Teorema del coseno:

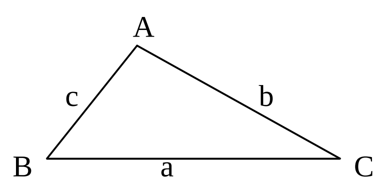
$\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 \quad 2\mathrm{bc}\cdot\cos(\mathrm{A})$

$\mathrm{b}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2 \quad 2\mathrm{ac}\cdot\cos(\mathrm{B})$

$\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 \quad 2\mathrm{ab}\cdot\cos(\mathrm{C})$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$



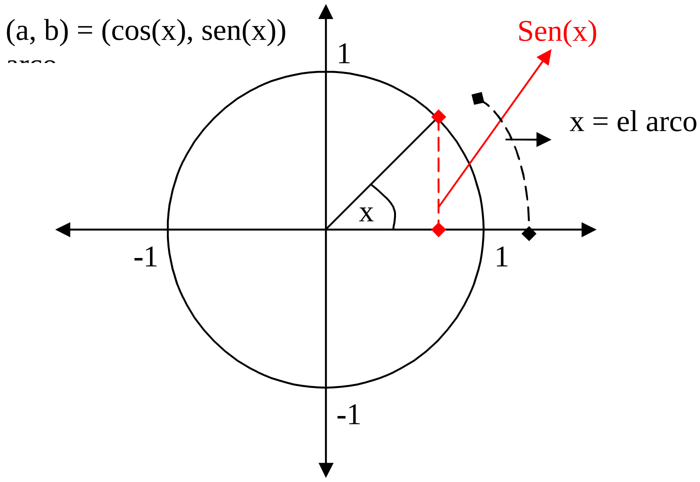
1) Herón de Alejandría en el siglo I de nuestra era, asegura que el área de un triangulo es $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p es el sumiperímetro del triangulo de lados *a*, *b y c*. Demuestre que Herón estaba en lo correcto.

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$A=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$
$$A=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$
$$A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$
$$A=\frac{1}{4}\sqrt{\left((a+b)^2-c^2\right)(c+(b-a))(c-(b-a))}$$
$$A=\frac{1}{4}\sqrt{\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(b-a)^2\right)}$$

Ocupando ***Teorema del coseno*** $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{\left((a^2+b^2+2ab-c^2\right)\left(c^2-b^2+2ab-a^2\right)}$$
$$A=\frac{1}{4}\sqrt{((2ab(1+\cos(\gamma)))(-2ab\cos(\gamma)+2ab)}$$
$$A=\frac{1}{4}\sqrt{((2ab(1+\cos(\gamma)))(2ab(1-\cos(\gamma)))}$$
$$A=\frac{ab}{2}\sqrt{1-\cos^2(\gamma)}$$
$$A=\frac{ab}{2}sen(\gamma),\_con\_0<\gamma<\pi$$
$$A=\frac{a}{2}h_a$$
$$A=\sqrt{p(´p-a)(p-b)(p-c)}$$

1) Demuestre que $|sen(x)|\le|x|$ para todo $x\in\Re$.



Si $x > \frac{\pi}{2} > 1 \geq sen(x) \Rightarrow x \geq sen(x)$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right[$

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ el arco siempre va a ser mayor que la coordenada *y* (que es igual a sen(x)).

Luego, $x \geq sen(x)$ para $x \in [0, \infty[$

Para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$, $-x \leq -sen(x) \Rightarrow |x| \geq |sen(x)|$

Si $x < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow |x| > \frac{\pi}{2} > |sen(x)|$ para $x \in]-\infty, 0]$

Por tanto, $|x| \geq |sen(x)|$ para $x \in \Re$

2) Demuestre que si $|x-y| < \varepsilon$ entonces $|sen(x) - sen(y)| < \varepsilon$ (Ayuda: $|sen(x) - sen(y)| = \left|2sen\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$) ¿Puede obtener un resultado similar para la función real $f(x) = \cos(x)$?

Si $|x-y| < \varepsilon$ por demostrar que $|sen(x) - sen(y)| < \varepsilon$.

Sabemos por enunciado que:

$$|sen(x) - sen(y)| = \left|2sen\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

$$|sen(x) - sen(y)| = 2 \cdot \left|sen\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

Ya que $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1$ para todo $x, y \in \Re$

$$|sen(x) - sen(y)| \leq 2 \cdot \left| sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$$

Ocupando ejercicio anterior, $|x| \geq |sen(x)|$ para $x \in \Re$

$$|sen(x) - sen(y)| \leq 2 \cdot \left| \left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$$
$$|sen(x) - sen(y)| \leq \cdot |x-y|$$

Luego, como sabemos que $|x-y| < \varepsilon$

$$|sen(x) - sen(y)| \leq \cdot |x-y| < \varepsilon$$
$$\therefore |sen(x) - sen(y)| < \varepsilon$$

¿Puede obtener un resultado similar para la función real $f(x) = \cos(x)$?

Si se pude primero debemos deducir la ayuda que se dio para la parte 1.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) \qquad (1)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) \qquad (2)$$

Si sumamos (1) - (2)

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot sen(\alpha)sen(\beta)$$

Si tomamos $x = \alpha + \beta \wedge y = \alpha - \beta$, obtenemos

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot sen\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\therefore |\cos(x) - \cos(y)| = \left| 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \qquad (3)$$

Utilizando (3)

$$|\cos(x) - \cos(y)| = \left| 2sen\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$$

Ya que $sen\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1$ para todo $x, y \in \Re$

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq 2 \cdot \left| sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$$

Ocupando ejercicio anterior, $\left|x\right| \geq \left|sen(x)\right|$ para $x \in \Re$

$$\left|\cos(x)-\cos(y)\right| = 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right|$$
$$\left|\cos(x)-\cos(y)\right| = \cdot\left|x-y\right|$$

Luego, como sabemos que $\left|x-y\right| < \varepsilon$

$$\left|\cos(x)-\cos(y)\right| \leq \cdot\left|x-y\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \left|\cos(x)-\cos(y)\right| < \varepsilon$$