Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Junio, 2008

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x^2+x+1$. Encuentra un intervalo abierto U tal que si $x\in U$ entonces

$$4,99 < f(x) < 5,01.$$

Una Solución:

Como

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

y como $f(1)=5$, existe un vecindario de 1, digamos U, tal que si $x\in U$ entonces $f(x)\in(4,99;5,01)=V$.

Sea $\delta=10^{-3}$ y consideremos $x\in U=(1-\delta,1+\delta)$, entonces

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Asignar dos puntos si el intervalo efectivamente cumple la condición pedida.

$$1-\delta < x < 1+\delta$$

$$1-2\delta+\delta^2 < x^2 < 1+2\delta+\delta^2$$

Es importante notar que si $0<x<y$ entonces $x^2<y^2$.

$$3-6\delta+3\delta^2 < 3x^2 < 3+6\delta+3\delta^2$$

$$3-6\delta+3\delta^2+(1-\delta) < 3x^2+x < 3+6\delta+3\delta^2+(1+\delta)$$

$$5-7\delta+3\delta^2 < 3x^2+x+1 < 5+7\delta+3\delta^2$$

$$5-(7\delta+3\delta^2) < 5-7\delta+3\delta^2 < f(x) < 5+7\delta+3\delta^2$$

Pero como

$$7\delta + 3\delta^2 = 7\times 10^{-3} + 3\times 10^{-6} = 0,007003 < 0,01$$

Se tiene que

$$4,99 < 5-(7\delta+3\delta^2) < 5-7\delta+3\delta^2 < f(x) < 5+7\delta+3\delta^2 < 5,01$$

Por lo tanto si $x \in U$, entonces $f(x) \in V$

Asignar 4 puntos si el estudiante comprueba que el intervalo efectivamente cumple la condición pedida.

$\boxed{\text{4 puntos}}$

2. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{tg}(x)}$$

Una Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \cos(x)$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

y como

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{tg}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \cos(x) = 0$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$