8. Considere n cursos paralelos de matemática, y sus respectivos profesores (un profesor solo hace clases a uno de los cursos). Para la primera prueba del curso cada profesor le tomará la prueba a un curso distinto del propio. ¿De Cuántas maneras distintas se pueden distribuir los profesores en los cursos?

Desarrollo:

Primero: El ejercicio sin ningún tipo de restricción, es decir si cualquier profesor podría tomar el control a cualquier curso seria igual a $n!$. Debido a que,

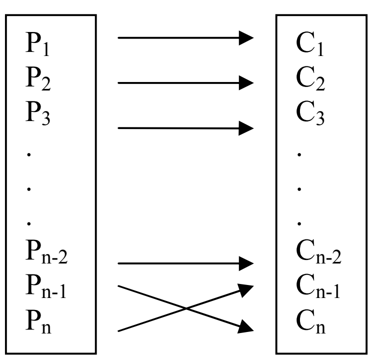
n	n-1	n-2	….	1

Segundo: Debemos restar las restricciones, esto es, eliminar los casos en que hay profesores en sus propios cursos.

- Caso n profesores en sus propios cursos: Existe solo un caso, pues todos los profesores están fijos en sus cursos.

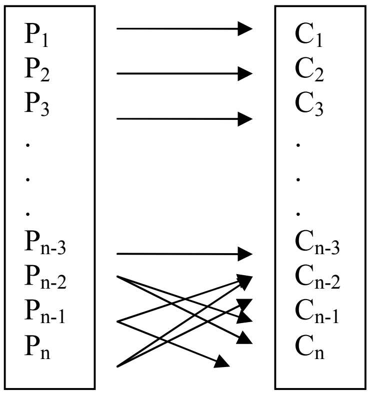
- Caso n-1 profesores en sus propios cursos: Debido a que hay n-1profesores en sus propios cursos, el último profesor debe estar en su propio curso. Por lo tanto, en este caso no hay restricción debido a que es la misma que la anterior.

- Caso n-2 profesores en sus propios cursos: En la grafica siguiente se puede observar que hay n-2 profesores fijos, esto deja una sola posibilidad para los dos profesores que quedan, pues la otra es su propio curso.



Entonces la pregunta es, cuantos conjuntos de n-2 profesores fijos podemos formar. Podemos formar $\binom{n}{n-2}$, luego este numero lo multiplicamos por uno, pues hay una sola posibilidad cada n-2 fijos. $1\cdot\binom{n}{n-3}$

- Caso *n-3* profesores en sus propios cursos: En la grafica siguiente se puede observar que hay *n-3* profesores fijos, esto deja dos posibilidades para los tres profesores que quedan, pues la otra es su propio curso.



Entonces la pregunta es, cuantos conjuntos de *n-3* profesores fijos podemos formar. Podemos formar $\binom{n}{n-3}$, luego este numero lo multiplicamos por dos, pues hay dos posibilidades cada *n-3* fijos. $2\cdot\binom{n}{n-3}$

Seguimos así sucesivamente, y obtenemos:

$$C = n! - \left[\underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{todos en sus cursos}} + \overbrace{0\cdot\binom{n}{n-1}}^{\text{n-1 en sus cursos}} + \underbrace{1\cdot\binom{n}{n-2}}_{\text{n-2 en sus cursos}} + \overbrace{2\cdot\binom{n}{n-3}}^{\text{n-3 en sus cursos}} + \underbrace{3\cdot\binom{n}{n-4}}_{\text{n-4 en sus cursos}} + \ldots + \overbrace{(n-3)\cdot\binom{n}{2}}^{\text{2 en sus cursos}} + \underbrace{(n-2)\cdot\binom{n}{1}}_{\text{1 en sus cursos}} \right]$$

$$C = n! - \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} (i-1)\cdot\binom{n}{n-i} \right]$$