

Tercera Guía de Matemáticas I

17.

II. Decida cuál(es) de las siguientes afirmaciones son ciertas, justifique.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (tu respuesta no necesita cálculos).

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{n-k}$$

2. Si $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (Resuelva esto de dos formas distintas).

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{k \cdot n! + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

La segunda forma de resolverlo, queda como ejercicio.

3. La suma de los términos de n -ésima fila del triángulo de Pascal es 2^n .

Ocupando binomio de Newton.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n$$

4. Un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. (Esto ya se hizo por inducción, ahora resuélvalo de otro modo).

Lo resolveremos por binomio de Newton.

Para formar todos los subconjuntos de un conjunto de n elementos, debemos agrupar los elementos de manera de obtener subconjuntos de 0 elementos (subconjunto vacío), 1 elemento, 2 elementos, ..., n elementos (conjunto completo).

0 elementos $\binom{n}{0}$

1 elemento $\binom{n}{1}$

$\vdots$

n elementos $\binom{n}{n}$

Luego, sumamos los posibles subconjuntos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n$$

5. En el desarrollo de $(3x^2 - x^{-1})^6$ no hay términos independientes de x .

$$\begin{aligned} (3 \cdot x^2 - x^{-1})^6 &= \sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} \cdot (3x^2)^i \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^{6-i} = \sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} \cdot (-1)^{6-i} \cdot 3^i \cdot x^{2i} \cdot (x)^i \cdot (x)^{-6} \\ &= \sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} \cdot (-1)^{6-i} \cdot 3^i \cdot x^{3i-6} \end{aligned}$$

Cuando $3i-6=0$, $i=2$.

Luego $x^{3i-6} = 1$

$\therefore$ Hay términos independientes de x , para $i = 2$.

6. En cualquier fila del triángulo de Pascal si se suma los elementos alternando el signo, resulta cero.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (1)^{n-i} = (1-1)^n = 0$$

7. El desarrollo del Binomio de Newton $(a+b)^n$ tiene n sumandos.

No, tiene $(n+1)$ sumandos, pues la sumatoria $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i}$ parte desde cero.

8. Si $\binom{12}{x} = \binom{12}{3}$, entonces $x = 3$

Ocupando,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ Demostrado II.1}$$

$$n = 12, k = 3, n-k = 9$$

Luego se concluye, que x no es necesariamente 3, sino puede ser perfectamente 9.

9. $a_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$ es un número entero para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \cdot (\sqrt{3})^i \cdot 2^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (\sqrt{3})^i \cdot 2^{n-i} \\ &= \left[\binom{n}{0} 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} (\sqrt{3}) + \binom{n}{2} 2^{n-2} (\sqrt{3})^2 - \binom{n}{3} 2^{n-3} (\sqrt{3})^3 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (\sqrt{3})^n \right] \\ &\quad + \left[\binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} (\sqrt{3}) + \binom{n}{2} 2^{n-2} (\sqrt{3})^2 + \binom{n}{3} 2^{n-3} (\sqrt{3})^3 + \dots + \binom{n}{n} (\sqrt{3})^n \right] \end{aligned}$$

Es fácil observar que los términos que tienen $(\sqrt{3})$ elevado a un impar, se eliminan con los términos de la segunda sumatoria.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left[\binom{n}{0} 2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} (\sqrt{3})^2 + \binom{n}{4} 2^{n-4} (\sqrt{3})^4 + \dots + \binom{n}{n} (\sqrt{3})^n \right] &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} \cdot 2^{n-2i} \cdot (\sqrt{3})^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} \cdot 2^{n-2i} \cdot (3)^i \end{aligned}$$

Luego, $\binom{n}{2i}$ Siempre es un entero, para todo $i = \{0, \dots, n/2\}$

3^i Siempre es un entero, para todo i .

2^{n-2i} Siempre es un entero, para todo $i = \{0, \dots, n/2\}$

$\therefore$ Como la suma de enteros es un entero, podemos concluir que a_n es un entero para cualquier valor.

10. Para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, se cumple $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} = 2 \cdot 3^n$

Podemos escribir la sumatoria $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1}$, como

$$2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \cdot (1)^{n-k} = 2 \cdot (1+2)^n = 2 \cdot 3^n$$

11. Debemos demostrar que $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n}{1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \binom{n+1}{2}$$

La traducción en el triangulo de Pascal corresponde, a la suma de la segunda diagonal, que es igual al termino inmediatamente a la derecha del ultimo termino de la suma (de la fila n).

12. Debemos demostrar que $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$

$$\begin{aligned} \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{n}{2} &= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} \right) \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot n^3 + 3 \cdot n^2 + n - (3 \cdot n^2 + 3 \cdot n)}{6} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot n^3 - 2 \cdot n}{6} \right] = \left[\frac{n^3 - n}{6} \right] = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{3!} \\ &= \binom{n+1}{3} \end{aligned}$$

Para darse cuenta que la sumatoria $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} \right)$,

solo basta mirar el último término $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ y convertir la n en i .

La traducción en el triangulo de Pascal corresponde, a la suma de la tercera diagonal, que es igual al termino inmediatamente a la derecha del ultimo termino de la suma (de la fila n).

13. **Demostrar que** $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

La forma más fácil de demostrarlo es por inducción.

Para $n = p$, tenemos $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, cumple.

Hipótesis, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Por demostrar que $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$

$$\underbrace{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{n}{p}}_{\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$$

$$= \binom{n+2}{p+1}$$

En el último paso se ocupó la desigualdad, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ demostrada en la guía dos.

La traducción en el triángulo de Pascal corresponde, a la suma de la k-esima diagonal, que es igual al termino inmediatamente a la derecha del ultimo termino de la suma (de la fila n).

II. Resuelva los siguientes problemas

1. Encuentre un valor de x tal que $\binom{x}{16} = \binom{x}{7}$

Ocupando,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ Demostrado en II.1}$$

$$n - k = 7, \quad k = 16, \quad n - 16 = 7$$

Luego, $n = 23$.

2. Se tiene un cubo de madera de 4 centímetros de arista, se pintan de azul todas las caras y luego se corta formando 64 cubitos de 1cm de arista cada uno. ¿ Cuántos de ellos no tienen ninguna cara pintada? ¿ Cuántos de ellos tienen una cara pintada? ¿ Cuántos de ellos tienen dos caras pintadas? ¿ Cuántos de ellos tienen tres caras pintadas? ¿ Cuántos de ellos tienen cuatro caras pintadas?

Cuéntenlos ustedes.

3. En el Poker, ¿es más fácil obtener un Full o Color?

$$\text{Full} = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{1} \binom{13}{2}$$

Hay 13 cuartetos de cartas iguales.

La manera de elegir un par dentro un conjunto de cuatro elementos = $\binom{4}{2}$

La manera de elegir un trío dentro un conjunto de cuatro elementos = $\binom{4}{3}$

El término $\binom{13}{1}$, representan la manera de elegir el trío o par dentro de los 13 cuartetos.

El término $\binom{12}{1}$, representa la manera de elegir el trío o par dentro de los 12 cuartetos que quedan, pues ya se ocupo uno en un trío o par anterior.

$$\text{Color} = \binom{13}{5} \binom{4}{1}$$

Interprete usted.

4. ¿Es más fácil ganar en el Loto o en el Kino?

(Loto) = $\binom{36}{6}$, la manera de elegir 6 números entre 36.

(Kino) = $\binom{25}{15}$, la manera de elegir 15 números entre 25.

Intérprete cual es mayor.

5. En la P.S.U de Matemáticas, hay 70 preguntas cada una de ellas con 5 alternativas. ¿Cuántos estudiantes se necesitarían para cubrir las posibles formas de responder a la prueba?

Se necesitan 5^{70}

- Para responder 1 pregunta se necesitan 5 personas.
- Para responder 2 preguntas se necesitan 5^2 personas, pues si la primera persona respondió a) en la primera pregunta tiene 5 nuevas posibilidades.
- ...
- Generalizando si tengo 70 preguntas se necesitan 5^{70}

6. ¿Cuál es el término central el desarrollo de Binomio de $(3x - 2xy)^4$?

$$(3x - 2xy)^4 = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} \cdot (3x)^i \cdot (-1)^i (2xy)^{4-i}$$

Solo basta igualar $i = 4 - i$
Luego, $i = 2$.

El término central es $\binom{4}{2} (3x)^2 (2xy)^2$

7. En un juego de naipes de 52 cartas, se reparten todas las cartas a cuatro jugadores que forman 2 parejas, gana la pareja que tiene todos los corazones. ¿Es más fácil perder o ganar?

$$\text{Ganar} = \binom{13}{13} \cdot \binom{39}{13}$$

$$\text{Perder} = \binom{13}{0} \cdot \binom{52}{26} + \binom{13}{1} \cdot \binom{51}{25} + \dots + \binom{13}{12} \cdot \binom{40}{14}$$

Interprete quien gana.

8. Un domador de fieras tiene 4 tigres y 5 leones, los debe hacer ingresar a la arena en fila, pero jamás debe poner a un tigre detrás de otro tigre. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Al tener 5 leones y 4 tigres, nos imaginaremos nuestra mano; nuestros dedos serán los leones y los espacios, los tigres. Los leones se pueden ordenar de $5!$ Maneras distintas. Los tigres, al no poder estar juntos, se tendrán q mover entre los tigres, ocupando los 6 espacios generados por nuestra mano (4 al medio y 2 a los extremos). Así, el primer tigre podrá ponerse en 6 espacios, el siguiente en 5, el otro en 4 y el último en 3.

$$5! * 6 * 5 * 4 * 3$$

Pero como existe repetición en los tigres, tendremos que dividir todo esto por $5!$ y por $4!$, que son el número de leones y tigres respectivamente.

$$5! * 6 * 5 * 4 * 3$$

$$\frac{4! * 5!}{5! * 4!}$$

Generalizando este ejercicio para $n+1$ leones y n tigres (que no puedan estar 2 juntos), se obtiene:

$$\frac{\prod_{k=3}^{L+1} k}{T!}$$

Donde $L = n^\circ$ de leones y $T = n^\circ$ de tigres

El símbolo $\prod$ es lo mismo q una sumatoria pero con multiplicaciones, se denomina productoria o pitatoria.

Nota: Ejercicio Resuelto y Generalizado, por Eduardo Salazar.

9. Se lanzan 2 dados ganas si los valores que aparecen suman 7, y pierdes si suman 11, 12 o 2. ¿Es más fácil perder o ganar?

11. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

Hagamos una analogía al problema del ejercicio 2, si tengo un conjunto A con n elementos, cuantas aristas puedo formar que tengan en sus extremos elementos de A .

Puedo formar $\binom{n}{2}$, pero le debemos restar n lados del polígono.

$$\text{Luego, } \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

12. Inés eligió cuatro dígitos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Formó con ellos todos los posibles números de 4 cifras distintas y sumó todos esos números, el resultado fue 193314. Encuentra los dígitos que eligió Inés.

Inés debe escoger 4 números entre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

R// Sean a, b, c, d los números que eligió Inés.

Inés realizó todas las combinaciones posibles con los 4 números:

$$4! = 24 \text{ combinaciones}$$

Bajo este razonamiento podemos decir que, al tener 4 números, habrán 6 de ellos que comiencen con a, 6 con b, 6 con c y 6 con d. (24/4)

a b c d

a b d c

a c d b

a c b d

a d c b

a d b c

Pero sabemos que a ocupa el valor de las unidades de mil, así que si seguimos con este proceso, tendremos que:

$$6a \cdot 1000, 6b \cdot 1000, 6c \cdot 1000, 6d \cdot 1000$$

Así nos damos cuenta de que cada dígito ocupará el lugar de centena, decena o unidad 6 veces. De modo:

$$6000a + 600a + 60a + 6a$$

Y, como sabemos que al sumar los 24 números obtenidos obtenemos 193314 no tenemos más que realizar la siguiente suma:

$$6666a + 6666b + 6666c + 6666d = 193314$$

Factorizando se tiene que:

$$6666(a + b + c + d) = 193314$$

$$a + b + c + d = 193314/6666$$

$$a + b + c + d = 29$$

Pero sabemos que, como son cuatro dígitos distintos menores a 10 los que se suman, debemos descomponer a 29, de forma que:

$$a + b + c + d = 30 - 1$$

$$a + b + c + d = 9 + 8 + 7 + 6 - 1$$

$$a + b + c + d = 9 + 8 + 7 + 5.$$

Por lo tanto: 5, 7, 8, 9 son los números que escogió Inés.