

# Pauta Control 14 de Matemáticas 1,.....el último

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 1 de Julio, 2010

**Tiempo : 15 minutos .**

**Nombre:**

**Elija sólo un problema.**

1. Un globo se encuentra a 50 metros de altura sobre una carretera recta y se esta elevando verticalmente con una rapidez de  $2m/s$ . En ese instante pasa un auto que viaja a  $16m/s$ . ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre el globo y el auto a 5 segundos despues?.

Solución:

Sea  $y(t)$  y  $x(t)$  con  $t > 0$  la altura y la distancia del globo y auto respectivamente, luego de pasar el auto, entonces se tiene que  $y(0) = 50$  metros y si  $t > 0$ ,  $y(t) = 50 + h(t)$ , donde  $h(t)$  es la altura del globo a partir de la altura 50 metros.

Usando teorema de Pitagóras, se tiene que en cada instante  $t > 0$  la distancia entre el globo y el auto es

$$D(t) = \sqrt{(y(t))^2 + (x(t))^2} = \sqrt{(50 + h(t))^2 + (x(t))^2}$$

Se pide  $D'(t) = \frac{dD}{dt}$  en  $t = 5$ .

En efecto, vemos que

$$D'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(50 + h(t))^2 + (x(t))^2}} ((50 + h(t))^2 + (x(t))^2)'$$

Por tanto

$$D'(t) = \frac{(50 + h(t))h'(t) + x(t)x'(t)}{\sqrt{(50 + h(t))^2 + (x(t))^2}}$$

Sabemos que  $h'(t) = 2m/s$  y  $x'(t) = 16m/s$  y en  $t = 5$ , se tiene que  $h(5) = 2m/s \times 5s = 10m$  y  $x(5) = 16m/s \times 5s = 80m$ .

Reemplazando estos valores en  $D'(t)$ , obtenemos que

$$D'(5) = \frac{(50m + 10m)2m/s + 80m16m/s}{\sqrt{(50m + 10m)^2 + (80m)^2}} = \frac{1400m^2/s}{\sqrt{10000m^2}} = 14m/s$$

2. Sea  $f$  una función definida por

$$f(x) = \sqrt{\left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)} + \arccos(2x^3 - 5)$$

Determine  $f'(x)$ .

Solución:

Recordemos que  $(\csc(x))' = -\csc(x)\cot(x)$  y  $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \sqrt{\left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)} + \arccos(2x^3 - 5) \right)' \\ &= \left( \sqrt{\left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)} \right)' + (\arccos(2x^3 - 5))' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)}} \left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)' + \frac{-1}{\sqrt{1 - (2x^3 - 5)^2}} (2x^3 - 5)' \\ &= \frac{2\csc\left(\frac{1}{x}\right)\csc\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} + 7}{2\sqrt{\left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)}} - \frac{6x}{\sqrt{1 - (2x^3 - 5)^2}} \\ &= \frac{2\csc^2\left(\frac{1}{x}\right)\cot\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} + 7}{2\sqrt{\left(\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) + 7x\right)}} - \frac{6x}{\sqrt{1 - (2x^3 - 5)^2}} \end{aligned}$$