1) Probar que la función f(x) = x + sen x − 1 es continua para toda y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación: x + sen x − 1 = 0.

Solución:

La función es continua por álgebra de funciones continuas, ya que es la suma de funciones continuas.

Además:

f(0) = 0 + sen (0) − 1 = − 1 < 0.

f(π/2) = π/2 + sen (π/2) − 1 = π/2 > 0.

Luego, por teorema de Bolzano, podemos afirmar que al menos existe un valor c que pertenece al intervalo (o, π/2) tal que:

f(c) = 0 c + sen c − 1 = 0

Por tanto existe al menos una solución real de la ecuación x + sen x − 1 = 0.

2) ¿Tiene alguna raíz la siguiente ecuación: sen(x) + + = 0? Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que /4 en el que se encuentre la raíz.

Solución:

Consideremos la función: f(x)= sen(x) + + , la cual sabemos que es continua. Como la idea es usar el teorema de Bolzano, encontremos dos puntos para los cuales sus imágenes tengan distinto signo. Ejemplo:

f(0)=1/2 > 0

f(-/2)= -3/4 < 0

Luego podemos asegurar que existe c en (-/2,0) tal que f(c)=0, es decir la ecuación sen(x) + + = 0 tiene al menos una raíz. Ahora ustedes buscan el intervalo en el que se lo piden, ya que el inérvalo es de largo /2 y se les pedía de largo -/4.

3) La función f : [0, ] −→ R definida por f(x) = x + 2 cos x tiene máximos y mínimos?

Solución:

La función f es continua y está definida en un intervalo cerrado y acotado, por tanto f tiene en [0, ] un máximo y un mínimo absolutos (por teorema de Weierstrass).

(no encontré nada más relacionado con Weierstrass ☹ )