Pauta Control 7 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 13 de Mayo, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sea $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ¿Es f una función inyectiva?. De no serlo haga las restricciones necesarias para que lo sea. Justifique su respuesta.

   Solución:

   Consideremos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$ en $(-1,1)$ entonces se tiene que $f(x_1) = \frac{2\sqrt{3}}{3} = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$. Por tanto f no es inyectiva.
   Sean x_1 y x_2 en $(-1,1)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x_2^2} = \sqrt{1-x_1^2} \\
&\Leftrightarrow \quad 1-x_2^2 = 1-x_1^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)(x_1+x_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2
\end{aligned}$$

   Esto último sugiere que si $x_1, x_2 \in (-1,0]$ o bien $x_1, x_2 \in [0,1)$ entonces f es inyectiva, es decir $f : (-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva o bien $f : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva.

2. Un alambre de 10 metros de longitud se corta en dos pedazos. Con un pedazo se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia.
   ¿De que manera debe hacerse el corte para que la suma de las áreas encerradas por los alambres sea mínima?.

   Solución:

   Sea x la medida de un pedazo del alambre entonces la medida del otro pedazo es $10 - x$, con que $x \geq 0$.

Con la medida x construimos el cuadrado y con la medida $10-x$ construimos la circunferencia.
Luego el cuadrado tendrá lado $\frac{x}{4}$ y por tanto su área será $\frac{x^2}{16}$.
La circunferencia tendrá radio $\frac{10-x}{2\pi}$ y por tanto su área será $\frac{(10-x)^2}{4\pi}$.
Así $A(x) = \frac{x}{4} + \frac{(10-x)^2}{4\pi}$, con $0 \leq x \leq 10$, denota la función suma de las áreas encerradas por los alambres.
Notar que $A(x) = \frac{(1+\pi)}{4\pi}x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}$ es una parábola cóncava hacia arriba de vértice $\left(\frac{20}{1+\pi}, A\left(\frac{20}{1+\pi}\right)\right)$. Luego el corte se debe hacer en $0 < x = \frac{20}{1+\pi} < 10$, para que el área encerrada por los alambres sea mínima.