Pauta Control 6 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 6 de Mayo, 2010

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Considere el conjunto $A = \{\frac{3n^3+5}{n^3} : n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que $inf(A) = 3$.

   Solución:

   Notamos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

   $$\frac{3n^3+5}{n^3} = 3 + \frac{5}{n^3}$$

   Entonces como $\frac{5}{n^3} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

   $$3 + \frac{5}{n^3} > 3$$

   Luego $\frac{3n^3+5}{n^3} > 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, 3 es una cota inferior para el conjunto A.
   Ahora probaremos que 3 es la mayor cota inferior.
   En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe por la propiedad arquimediana $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{5}{\epsilon} < n_0$.
   Pero $n_0 \leq n_0^3$, por tanto $\frac{5}{\epsilon} < n_0^3$, lo que implica $\frac{5}{n_0^3} < \epsilon$ entonces $3 + \frac{5}{n_0^3} < 3 + \epsilon$. Esto demuestra que $Inf(A) = 3$.

2. Considere el conjunto $B = \{\frac{7n^2-2}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que $Sup(B) = 7$.

   Solución:

   Notamos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

   $$\frac{7n^2-2}{n^2} = 7 - \frac{2}{n^2}$$

   Entonces como $-\frac{2}{n^2} < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

   $$7 - \frac{2}{n^2} < 7$$

Luego $\frac{7n^2-2}{n^2} < 7$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, 7 es una cota superior para el conjunto B.
Ahora probaremos que 7 es la menor cota superior.
En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe por la propiedad arquimediana $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\epsilon} < n_0$.
Pero $n_0 \leq n_0^2$, por tanto $\frac{2}{\epsilon} < n_0^2$, lo que implica $\frac{2}{n_0^2} < \epsilon$ entonces $7 - \frac{2}{n_0^2} > 7 - \epsilon$. Esto demuestra que $Sup(B) = 7$.