Segunda Prueba de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

30 de Mayo, 2009.

Tiempo: 2 horas.

Nombre:

1. Elija entre a y b

   a) Calcula el límite $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{2x - 1}$.

   Solución:

   Si denotamos por $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ se tiene que $p(1/2) = 0$. Por lo tanto $2x - 1$ divide a p, haciendo la división se obtiene que:

   $$p(x) = (2x - 1)(x^2 + 1)$$

   por lo tanto

   $$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{2x - 1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x^2 + 1)(2x - 1)}{2x - 1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} x^2 + 1 = \frac{5}{4} \quad \blacksquare$$

   b) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -5x + 4$. Considera además el intervalo $J = (3 - 10^{-2}, 3 + 10^{-2})$. Encuentra un intervalo I para el cual se cumpla que si $x \in I$, entonces $f(x) \in J$.

   Solución:
   Como $\lim_{x\to\frac{1}{5}} f(x) = 3$ y como la función amplifica por 5 el largo de los intervalos se tiene que basta tomar

   $$I = \left(\frac{1}{5} - \frac{10^{-2}}{5}, \frac{1}{5} + \frac{10^{-2}}{5}\right)$$

   para asegurar lo que se pide. De hecho, si $x \in I$ se tiene que

   $$\frac{1}{5} - \frac{10^{-2}}{5} < x < \frac{1}{5} + \frac{10^{-2}}{5}$$
   $$-1 + 10^{-2} > -5x > -1 - 10^{-2}$$
   $$3 + 10^{-2} > -5x + 4 > 3 - 10^{-2}$$

   es decir, $f(x) \in J$. $\blacksquare$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sin(x) - x$. Elije tres de las siguientes preguntas y respóndelas, argumentando tus respuestas.

   a) ¿Existe $\alpha \neq 0$ tal que $f(\alpha) = \alpha$?

   Solución:

   No, pues si tal α existiera, $\alpha\sin(\alpha) - \alpha = \alpha$, como $\alpha \neq 0$ se tiene que
   $$\sin(\alpha) - 1 = 1,$$
   es decir
   $$\sin\alpha = 2$$
   lo cual es falso, pues $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ para cualquier valor de α.

   Por lo tanto no existe $\alpha \neq 0$ tal que $f(\alpha) = \alpha$. $\blacksquare$

   b) ¿Es f inyectiva?

   Solución:

   No, pues $f(0) = 0$, y además si $\sin(x) = 1$, se tiene que $f(x) = x\sin(x) - x = 0$, por ejemplo $f(\pi/2) = 0$. Luego 0 y $\frac{\pi}{2}$ tienen la misma imagen. $\blacksquare$

   c) ¿Es f creciente?

   Solución:

   No, pues $f(-\pi) = \pi$, y $f(\pi) = -\pi$. Es decir,
   $$-\pi < \pi \ \text{ y } f(-\pi) > f(\pi). \qquad \blacksquare$$

   d) Si $x > 0$, ¿Es cierto que $f(x) \leq 0$?

   Solución:

   Si, pues
   $$f(x) = x\sin(x) - x = x(\sin(x) - 1),$$
   además tenemos que
   $$-1 \leq \sin(x) \leq 1,$$
   por lo tanto
   $$\sin(x) - 1 \leq 0,$$
   así tomando $x > 0$, se tiene que
   $$f(x) = x\sin(x) - x = x(\sin(x) - 1) \leq 0 \qquad \blacksquare$$

e) ¿Cuáles son todos los valores β tal que $f(\beta) = 0$?

Solución:

Primero notar que $\beta = 0$ es uno de los valores tal que $f(\beta) = 0$. Si $\beta \neq 0$, entonces $f(\beta) = 0$ si y solamente si $\sin(\beta) - 1 = 0$. O equivalentemente

$$\beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto todos los valores de β tal que $f(\beta) = 0$ son $\beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, o bien $\beta = 0$. ■

3. Encuentre todos los números reales α tal que

$$2\cos^3(\alpha) + 11\cos^2(\alpha) + 17\cos(\alpha) + 6 = 0$$

(**Ayuda:** Estudie las raíces del polinomio

$$p(x) = 2x^3 + 11x^2 + 17x + 6)$$

Solución:

Estudiando las raíces racionales de p vemos que -2 es una de ellas. Haciendo la división de p en $x + 2$ resulta:

$$p(x) = (x + 2)(2x^2 + 7x + 3)$$

Por su parte las raíces de $q(x) = 2x^2 + 7x + 3$, son $x_1 = -3$ y $x_2 = \dfrac{-1}{2}$. Así se tiene que:

$$2\cos^3(\alpha) + 11\cos^2(\alpha) + 17\cos(\alpha) + 6 = 0$$

si y solo si

$$\cos(\alpha) = -2, \text{ o bien } \cos(\alpha) = -3, \text{ o bien } \cos(\alpha) = \frac{-1}{2}$$

Como $|\cos(\alpha)| \leq 1$ se tiene que el único posible valor es:

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Es decir

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{o bien,} \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

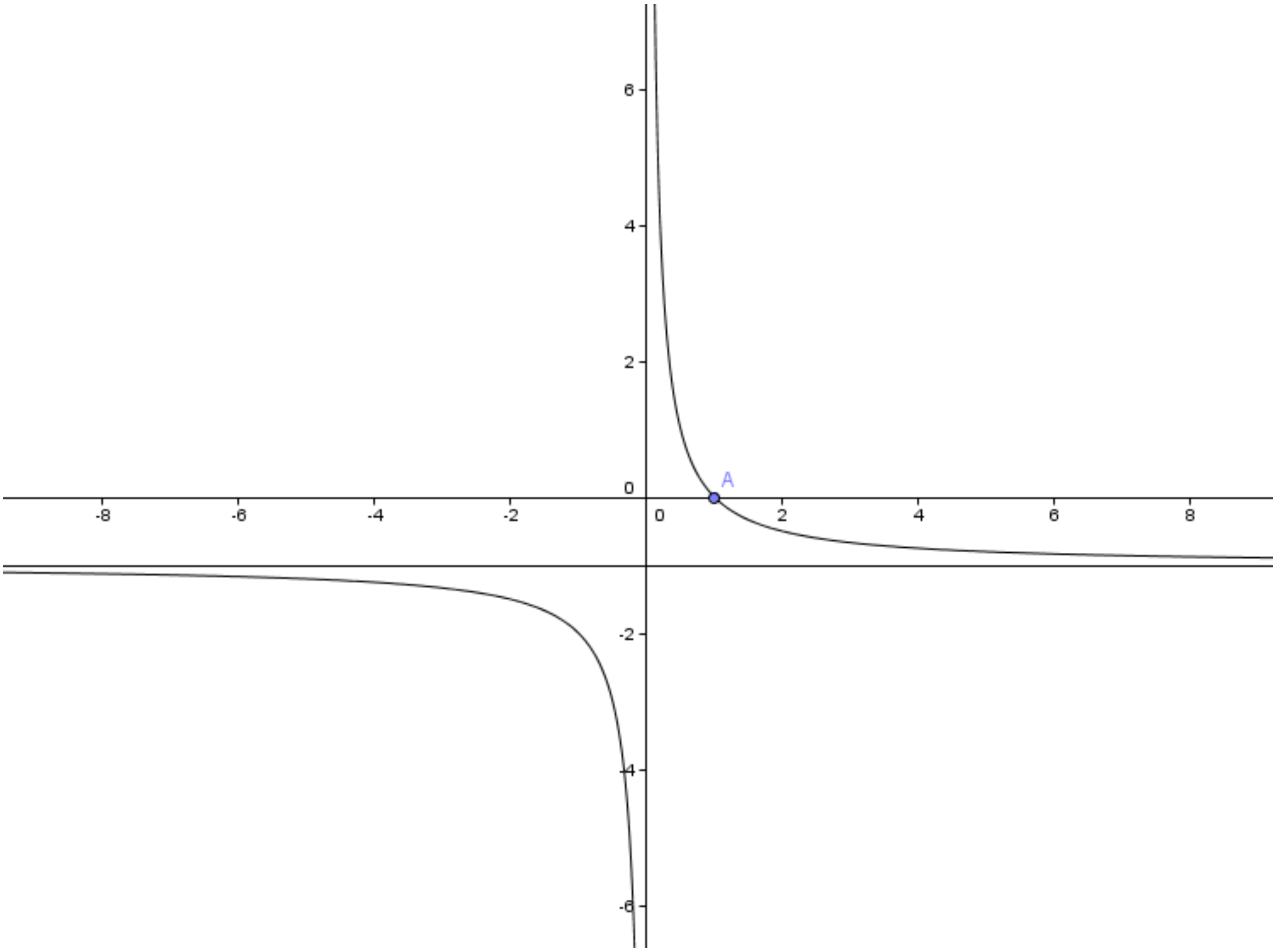
■

4. Considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

a) Grafica f, indicando intersección con los ejes y asíntotas.

Solución:

Primero notar que $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, es decir, su gráfico resulta de trasladar una unidad hacia abajo el gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$. Por lo tanto sus asíntotas son $y = -1$ y $x = 0$. Así el gráfico no intersecta el eje de las Y. La intesección con el eje X resulta al encontrar los x tales que $f(x) = 0$, y existe un x con esa condición, a saber es $x = 1$.



$\blacksquare$

b) Determina el ínfimo de $A = \{f(n)/\ n \in \mathbb{N}\}$

Solución:

Primero notar que

$$\frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como

$$\frac{1}{n} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

se tiene que

$$\frac{1}{n} - 1 > -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego -1 es cota inferior de A.

Si -1 no es ínfimo, existe un número $\alpha > -1$ que es cota inferior de A. Luego $\frac{1}{+}\alpha > 0$. Por propiedad arquimideana se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ y $N > \frac{1}{1+\alpha}$ o lo que es lo mismo

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{1+\alpha}{2}$$

$$-1 < \frac{1}{N} - 1 < -1 + (1+\alpha)$$

$$-1 < \frac{1}{N} - 1 < \alpha$$

Pero esto contradice el hecho que α es cota inferior de A. Por lo tanto

$$\text{ínf}(A) = -1$$

$\blacksquare$