Segunda Prueba de Matemáticas I*

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

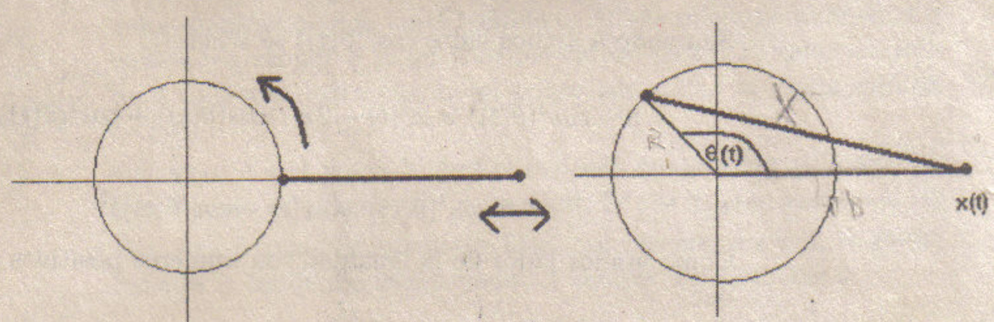
18 de Junio de 2005

Tiempo: 120 minutos.

Nombre:

Debe Justificar sus Afirmaciones

1. Una rueda de 1 m de radio gira en torno a su centro a razón de una vuelta por minuto. Adozada a ella está el extremo de una varilla de 3 m cuyo otro extremo se mueve horizontalmente en el eje X, como muestra la figura. En el instante $t = 0$ el extremo de la varilla adosada en la rueda está en el punto $(1, 0)$. Denotemos por $\theta(t)$ el ángulo que barre el radio que pasa por el punto adosado de la varilla a la rueda y por $x(t)$ la posición en el eje X del otro extremo de la varilla.



*Cada ítem pesa 1,5 puntos. Si su puntaje en la prueba es P su nota será $N = P + 1$.No necesita ni debe usar calculadora para resolver esta prueba. Se reciben consultas solo referente a los enunciados de los problemas.

$x^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta(t)$

$9 = 1 + b^2 - 2b\cos\theta(t)$

$\lim_{x\to 3} 2 - x^2 = -7$

a) Muestre que
$$8 = x^2(t) - 2x(t)cos(\theta(t)).$$
(Ayuda: Use el Teorema del Coseno)

<u>Solución:</u>

Por el Teorema del Coseno se tiene:

$3^2 = 1^2 + x^2(t) - 2x(t)cos(\theta(t))$ de donde se obtiene

$8 = x^2(t) - 2x(t)cos(\theta(t))$

b) Muestre que si t está medido en minutos se tiene
$$cos(2\pi t) + \sqrt{8 + cos^2(2\pi t)} = x(t)$$
(Ayuda: Note que $\theta(t) = 2\pi t$ y que $x^2 - 2xcos(\alpha) + cos^2(\alpha)$ es un cuadrado de binomio)

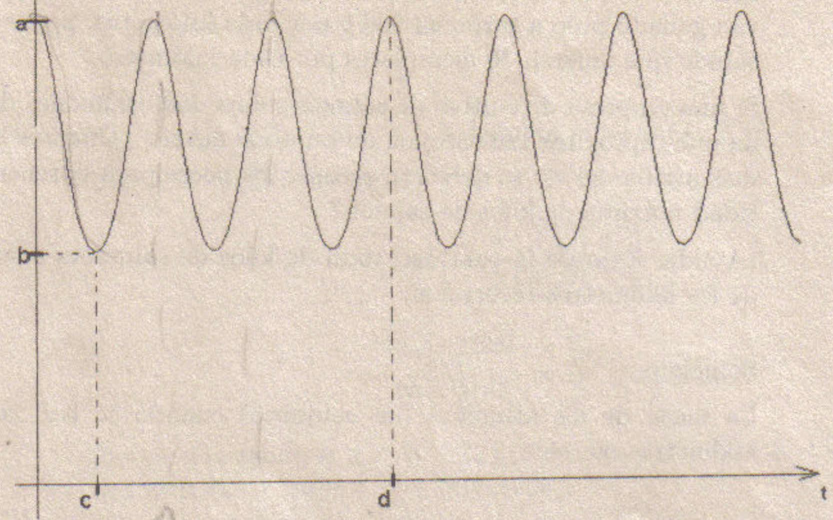
<u>Solución:</u>

Como la rueda gira a razón de una vuelta por minuto, entonces el ángulo recorre 2π por minuto, y como en el instante $t = 0$ el ángulo $\theta(0)$ es 0, se tiene que el ángulo $\theta(t)$ en el instante t es igual a $2\pi t$.

Entonces tenemos
$$8 = x^2(t) - 2x(t)cos(\theta(t))$$
Sumando a ambos lados $cos^2(\theta(t))$ se tiene:
$$8 + cos^2(\theta(t)) = x^2(t) - 2x(t)cos(\theta(t)) + cos^2(\theta(t))$$
$$8 + cos^2(\theta(t)) = (x(t) - cos(\theta(t)))^2$$
Como ambos lados de la igualdad son números positivos se tiene que
$$\sqrt{8 + cos^2(\theta(t))} = x(t) - cos(\theta(t))$$
Luego, reemplazando $\theta(t) = 2\pi t$ se tiene:
$$cos(2\pi t) + \sqrt{8 + cos^2(2\pi t)} = x(t)$$

$2 - x^2$

$c)$ El siguiente es el gráfico de la función $x(t)$



¿Cuáles son los valores de a, b, c y d? Justifique.

<u>Solución:</u> El valor máximo de x es 4 que es cuando el punto de la varilla adosada a la rueda está en el punto $(1, 0)$. Esto también se puede ver en la función de la parte anterior, que muestra que el valor máximo de x se logra cuando $cos(\theta)$ es máximo, es decir, 1 y se alcanza cuando θ es un multiplo entero de 2π. El valor mínimo de x es 2 y se logra cuando el punto adosado a la rueda está en $(-1, 0)$.

Entonces $a = 4$ y $b = 2$, c es el instante cuando por primera vez $x = 2$ y eso es cuando $\theta = \pi$, es decir, $2\pi c = \pi$, entonces $c = 1/2$. Por otra parte d es cuando x llegó por tercera vez a 4, es decir, cuando la rueda dio exactamente 3 vueltas, es decir $d = 3$.

2. Los salmones emigran desde las zonas bajas del río a las zonas altas del mismo con el fin de desovar. Los salmones a medida que suben en el río van ganado peso a razón de 200 g por cada kilómetro, pero también es sabido que mueren 30 ejemplares por cada kilómetro.

   Si una empresa de cultivo de salmones deja 4500 salmones de 2 kg cada uno (aproximadamente) en un punto B del río. ¿Cúantos kilómetros más arriba del río se debieran recoger los peces para obtener una cantidad máxima de kilos de salmón?

   (Ayuda: Exprese la cantidad total de kilos de salmones como función de los kilómetros recorridos)

   Solución:

   La masa de los salmones (en conjunto) cuando se han recorrido x kilómetros es

$$M(x) = (4500 - 30x)(2000 + 200x)\ [gr]$$

   que es el producto de la cantidad de peces multiplicado por lo que pesa cada pez.

   M e suna función cuadrática cuyo vértice es el máximo pues el coeficiente de x^2 es negativo. La primera coordenada del máximo es 70 que corresponde a la distancia que estamos buscando.

   Es decir, a 70 $[km]$ del punto inicial es donde la cantidad de masa del total de salmones es máxima.

3. Sea $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \frac{4x+3}{2x+2}$

a) Demuestre que f es biyectiva.

Solución:
Sea $g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ definida por $g(x) = \frac{2x-3}{4-2x}$
Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, entonces

$$f(g(x)) = \frac{4\left(\frac{2x-3}{4-2x}\right) + 3}{2\left(\frac{2x-3}{4-2x}\right) + 2}$$

$$= \frac{\frac{8x-12+12-6x}{4-2x}}{\frac{4x-6+8-4x}{4-2x}} = \frac{2x}{2} = x$$

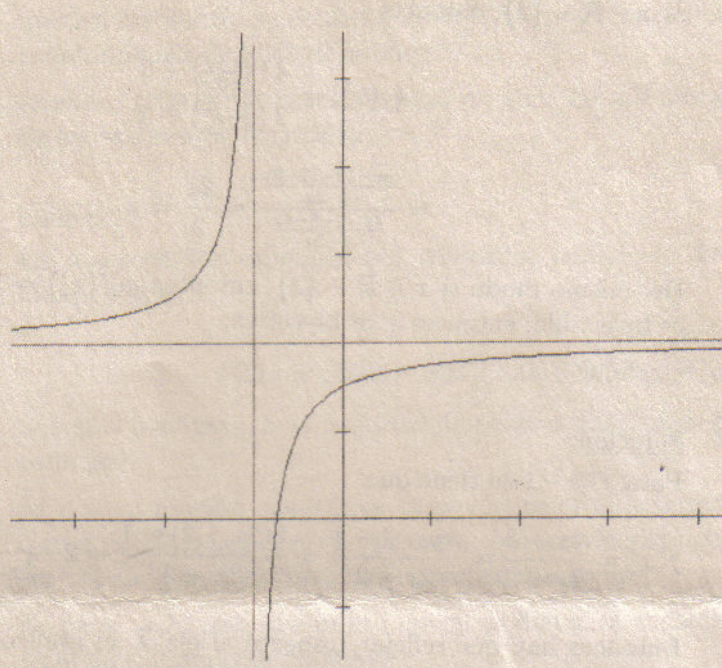
Del mismo modo si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, entonces $g(f(x)) = x$. Luego f es invertible, entonces f es biyectiva.

b) Grafique f

Solución:
Para $x \neq -1$ se tiene que:

$$f(x) = \frac{4x+3}{2x+2} = \frac{4x+4-1}{2x+2} = \frac{2(2x+2)-1}{2x+2} = 2 - \frac{1}{2x+2} = 2 - \frac{1/2}{x+1}$$

Entonces hay que reflejar respecto al eje X el gráfico $y = \frac{1/2}{x}$ y luego trasladar el origen al punto $(-1, 2)$



$c)$ Encuentre el supremo de $A = \{f(n)/\ n \in \mathbb{N}\}$

<u>Solución:</u>
Como ya vimos

$$f(n) = 2 - \frac{1}{2n+2}$$

Por lo tanto todo elemento de A es menor que 2. Luego 2 es cota superior de A.
Si 2 no es el supremo de A, entonces el supremo de A es un número s, menor que 2.

Enotnces $2 - s$ es un número positivo, lo mismo que $\frac{1}{2-s}$ por propiedad arquimedeana se tiene que existe un número natural n tal que $n > \frac{1}{2-s}$, además como $2n + 2 > n$ se tiene que

$$2n + 2 > \frac{1}{2 - s}$$

Como ambos lados de la desigualdad son números positivos, entonces los inversos multiplicativos satisfacen la desigualdad inversa, esto es:

$$\frac{1}{2n + 2} < 2 - s$$

$$s < 2 - \frac{1}{2n + 2}$$

lo cual es una contradicción, pues s, el supremo de A, no puede ser menor que un elemento del conjunto A. La contadicción viene de suponer que el $sup(A) \neq 2$. Luego se tiene que

$$sup(A) = 2$$

4. Elija entre a y b

$a)$ Calcule los siguientes límites

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(a+x) - sen(a-x)}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(a+x) - sen(a-x)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(a)cos(x) + sen(x)cos(a) - sen(a)cos(x) + sen(x)cos(a)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} 2cos(a)\frac{sen(x)}{x} = 2cos(a)$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{tg(x)}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{tg(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x}\frac{x}{tg(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x}\frac{x}{sen(x)}cos(x) = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$b)$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq |x|$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$. Muestre que $f(0) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Solución:

Como $0 \leq |f(0)| \leq |0|$ se tiene que $|f(0)| = 0$, luego $f(0) = 0$

Además $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ por teorema del sandwich podemos afirmar que si $x \to 0$, se tiene que $|f(x)| \to 0$ y como $|f(x)| \to 0$ es equivalente a $f(x) \to 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$