

Ayudantía Mate 1

01/09/2008

Ociel Gutiérrez G.

Es cierto que en el desarrollo de $(3x^2 - x^{-1})^6$ no hay términos independientes de x .

$$\begin{aligned}(3x^2 - x^{-1})^6 &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (3x^2)^{6-k} (-x^{-1})^k = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 3^{6-k} x^{2(6-k)} \cdot x^{-k} \cdot (-1)^k \\&= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 3^{6-k} x^{12-2k-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 3^{6-k} (-1)^k x^{12-3k}\end{aligned}$$

para que exista un término independiente de x ,
se tiene $x^{12-3k} = 1 \Rightarrow 12-3k = 0$
 $n = \frac{3k}{2} \quad (\text{X})$

luego no existe un término ind. de x ya
que $n, k \in \mathbb{N}$

2) Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.
Demuestre lo utilizando un método distinto a la inducción matemática.

$$\binom{n}{0} \equiv \text{nº de subconjuntos con 0 elementos (vacío)}$$

$$\binom{n}{1} \equiv \text{nº de subconjuntos con 1 elemento}$$

$$\binom{n}{2} \equiv \text{nº de subconjuntos con 2 ele.}$$

⋮

$$\binom{n}{n} \equiv \text{nº de subconjuntos con } n \text{ ele.}$$

∴ el nº total de subconjuntos está dado por:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n$$

$$= 2^n$$

~~17~~

3) ¿Cuál es el entero más cercano a $87(15 - \sqrt{224})$?

(Ayuda: $14 < \sqrt{224} < 15$ y $87 = 3 \cdot 29$)

$$14 < \sqrt{224} < 15 \quad / + 15$$

$$29 < 15 + \sqrt{224} < 30$$

$$\frac{1}{29} > \frac{1}{15 + \sqrt{224}} > \frac{1}{30} \quad / \cdot 87$$

$$\frac{87}{29} > \frac{87}{15 + \sqrt{224}} > \frac{87}{30}$$

$$\frac{87}{30} < \frac{87}{15 + \sqrt{224}} < \frac{87}{29}$$

$$\frac{3 \cdot 29}{30} < \frac{87}{15 + \sqrt{224}} \cdot \frac{15 - \sqrt{224}}{15 - \sqrt{224}} < \frac{3 \cdot 29}{\cancel{29}}$$

$$\frac{29}{10} < \frac{87(15 - \sqrt{224})}{225 - 224} < 3$$

$$2,9 < 87(15 - \sqrt{224}) < 3$$

$\therefore$ el entero más cercano a $87(15 - \sqrt{224})$ es 3

4) Es cierto que $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0$?

¿Puede encontrar una relación similar para $x < 0$?

se sabe que $(x-1)^2 \geq 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{ya que } x > 0)$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0}$$

como $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad / \cdot -1$

$$-x - \frac{1}{x} \leq -2$$

$$-x + \frac{1}{-x} \leq -2$$

se $y = -x$,
como $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
 $\therefore y < 0$

$$\boxed{y + \frac{1}{y} \leq -2 \quad \forall y < 0}$$