Segunda Prueba de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

21 de Junio, 2008.

Tiempo: 2 horas.

Nombre: PAUTA.

1. Sea $f : [-2, \infty) \to [1, \infty)$ definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Demuestra que f es invertible y encuentra su inversa.

$$f(x) = (x+2)^2 + 1 \quad , \quad x \geq -2 \quad ,$$

Sea $y \in [1, +\infty[$,

$$(x+2)^2 + 1 = y$$

$$(x+2)^2 = y - 1 \quad , \quad y - 1 \geq 0 \text{ pues } y \geq 1$$

Por lo tanto la ec. tiene solución

$$x + 2 = \pm\sqrt{y-1}$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{y-1}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{y-1}$$

Ya que $-\sqrt{y-1} \leq 0$ se tiene que

$x_2 = -2 - \sqrt{y-1} \leq -2$, luego $x_2 \notin \text{Dom} f$

y como $\sqrt{y-1} \geq 0$ se tiene que

$x_1 = -2 + \sqrt{y-1} \geq -2$, luego $x_1 \in \text{Dom} f$.

Luego dado $y \in [1, +\infty[$ existe un único x en el dominio tal que $f(x) = y$. luego f es biyectiva y $f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [-2, +\infty]$,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

Otra forma:

Definamos $f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [-2, +\infty[$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1} - 2$

(Como $y \geq 1$, $y-1 \geq 0$ y luego $\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$)

$y \in [1, \infty[$, $(f \circ f^{-1})(y) = f\left(\sqrt{y-1} - 2\right)$

podemos aplicar f a $\sqrt{y-1} - 2$ pues $\sqrt{y-1} - 2 \geq -2$ y por lo tanto está en el dominio de f.

$$f\left(\sqrt{y-1} - 2\right) = \left(\sqrt{y-1} - 2\right)^2 + 4\left(\sqrt{y-1} - 2\right) + 5$$

$$= (|y-1| - \cancel{4\sqrt{y-1}} + 4 + \cancel{4\sqrt{y-1}} - 8 + 5$$

$(y-1) \geq 0$

$$= y - 1 + 1$$

$$= y$$

Sea $x \in [-2, +\infty[$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left((x+2)^2 + 1\right)$$

Como $(x+2)^2 + 1 \geq 1$, podemos aplicar f^{-1} y

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt{(x+2)^2 + 1 - 1} - 2$$
$$= |x+2| - 2 \quad \text{como } x \geq -2,\ x+2 \geq 0$$
$$= x$$

Por lo tanto f^{-1} es la función inversa de f.

Otra forma: Sean $x_1, x_2 \in [-2, +\infty[$ tales que

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$(x_1+2)^2 + 1 = (x_2+2)^2 + 1$$
$$(x_1+2)^2 = (x_2+2)^2$$
$$(x_1+2)^2 - (x_2+2)^2 = 0$$
$$[(x_1+2) - (x_2+2)][(x_1+2) + (x_2+2] = 0$$
$$(x_1+2) - (x_2+2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (1)$$
$$x_1 + 2 + x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + 4 \quad (2)$$

Pero como $x_2 \geq -2$ entonces $-x_2 \leq -2$ y $x_1 = -x_2 + 4 \leq -2$, como $x_1 \geq -2$, tenemos que la sol (2) no sirve. Por lo tanto $x_1 = x_2$ es la única solución. Luego es inyectiva.

Epiyectiva: Sea $y \in [1, +\infty[\Rightarrow y \geq 1$.

$(x+2)^2 + 1 = y \rightarrow$ Como $y - 1 \geq 0$, la ec. $(x+2)^2 = (y-1)$ tiene solución, $x+2 = \pm\sqrt{y-1} \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{y-1}$, Como x debe ser ≥ -2, sólo nos sirve $\boxed{x = -2 + \sqrt{y-1}}$, luego es epiyectiva.

2. Una *estrella variable*, es una estrella cuya brillantez aumenta y disminuye de manera continua en períodos constantes. Para la estrella variable más visible, Delta Cephei, el tiempo entre el momento de mayor brillantez y el de menor brillantez es de $5,4$ días. La brillantez máxima es de $4,35$ unidades (de cierta medida), y la mínima es de $3,65$ unidades (de la misma medida). Si la brillantez es modelada por una función del tipo

$$B(t) := \gamma + \delta sen(\alpha + \beta t)$$

donde t son los días transcurridos. Encuentre los valores $\gamma, \delta, \alpha, \beta$, si en $t = 0$ la brillantez está en su punto máximo.

Valor máximo $= 4.35$

Valor mínimo $= 3.65$

Tiempo entre V.Max y V.Min $= 5.4$ días

$\gamma =$ Valor medio $= \dfrac{V.Max + V.Min}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$T =$ periodo $= 2 \cdot 5.4 = 10,8$

$\beta =$ velocidad angular $= \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{108} = \dfrac{\pi}{5.4}$

$\delta =$ Amplitud $=$ V.Max $-$ V.medio $= 4.35 - 4 = 0.35$

Como en $t=0$ se encuentra en el máximo está desplazada hacia la izquierda en un cuarto de periodo es decir $\dfrac{108}{4} = \dfrac{5.4}{2} = 2.7$

$sen(\beta t + \alpha) = sen\, \beta\left(t + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$, $\dfrac{\alpha}{\beta} = 2.7$

por lo tanto $\alpha = 2.7 \cdot \beta = 2.7 \cdot \dfrac{\pi}{5.4} = \dfrac{\pi}{2}$

luego $\boxed{B(t) = 4 + 0,35\, sen\left(\dfrac{\pi}{5.4} t + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

3. Considera la función polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

Demuestra que f tiene solo una raíz real.

raices racionales: $\frac{r}{s}$, $r/-2$ y $s/1$

luego las posibles raices son:

$\left\{ \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, 1, -1 \right\}$

$f(2) = 8-4-2-2=0$

luego 2 es raiz:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - x^2 - x - 2 : x-2 = x^2 + x + 1 \\
-x^3 + 2x^2 \\
\hline
\quad x^2 - x - 2 \\
\quad -x^2 + 2x \\
\hline
\qquad x - 2
\end{array}
$$

$f(x) = (x-2)(x^2+x+1)$

El polinomio x^2+x+1 no tiene raices reales pues $q(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Si tuviese una raiz a entonces $q(a) = 0$ pero $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Considera la función polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

Demuestra que f tiene solo una raíz real.

raíces racionales: $\frac{r}{s}$, $r/-2$ y $s/1$

luego las posibles raíces son:

$\left\{ \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, 1, -1 \right\}$

$f(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$

luego 2 es raíz:

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 - x - 2 : x - 2 = x^2 + x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline \quad x^2 - x - 2 \\ \quad -x^2 + 2x \\ \hline \qquad x - 2 \end{array}$$

$f(x) = (x-2)(x^2+x+1)$

El polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales pues $q(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Si tuviese una raíz a entonces $q(a) = 0$ pero $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Si se lanza desde el suelo una piedra verticalmente hacia arriba, con velocidad inicial 100 m/s. La altura que alcanza la piedra en el segundo t después de lanzada es:

$$h(t) = -5t^2 + 100t$$

a) Grafica h vs t.

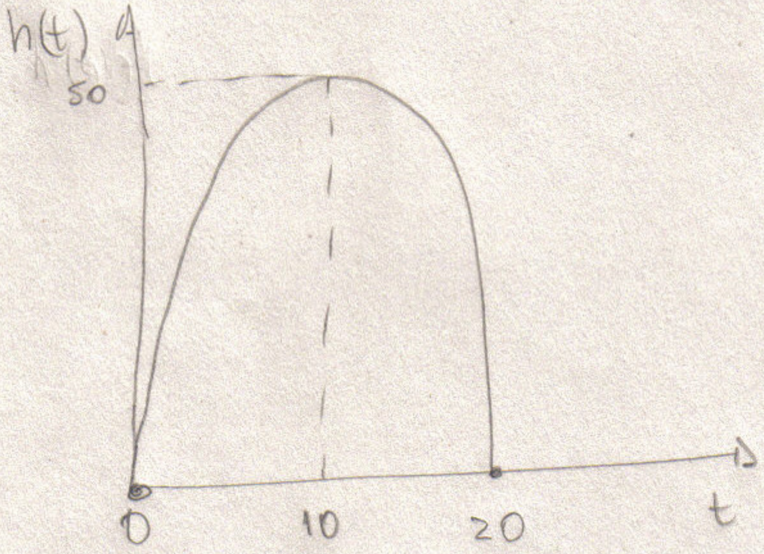
b) ¿Cuánto se demora la piedra en volver al suelo?

c) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la piedra?

a) $h(t)$ es una función cuadrática

$$h(t) = -5(t^2 - 20t + 100) - 100)$$

$$= -5(t-10)^2 + 500 \quad \forall t \geq 0$$



b) La piedra demora 20(s) en volver al suelo

c) $(t-10)^2 \geq 0 \quad \forall t \geq 0$

$-5(t-10)^2 \leq 0 \quad / +500$

$\underbrace{500 - 5(t-10)^2}_{h(t)} \leq 500$

$h(t) \leq 500 \quad \forall t \geq 0$

además $h(10) = 500$

$\therefore h_{max} = 500$ (m)