

Primera Prueba de Matemáticas I*

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

16 de Abril de 2005.

Tiempo: 120 minutos..

Nombre:

1. Elija solo dos problemas entre a), b) y c).

(a) Demuestre que la suma

$$\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}}$$

es menor que $3/4$ para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4}} - 1 \right) = \\ &= 1 - \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Pero como $\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} > 0$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} < \frac{3}{4} \quad \square$$

*Cada ítem pesa 1,5 puntos. Si su puntaje en la prueba es P su nota será $N = P + 1$. No necesita ni debe usar calculadora para resolver esta prueba. Se reciben consultas solo referente a los enunciados de los problemas.

(b) Sea $k \in \mathbb{N}$. Calcule el valor de la suma de todos los números pares que están entre $2k - 1$ y $4k + 1$.

Solución:

Para cualquier valor de $k \in \mathbb{N}$ los números $2k - 1$ y $4k + 1$ son números impares, luego todos los números pares entre $2k - 1$ y $4k + 1$ son todos los números de la forma

$$2k + 2i$$

donde $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, k$

Luego la suma de todos esos números es

$$\sum_{i=0}^k 2k + 2i = 2k(k+1) + 2 \sum_{i=0}^k i = 2k(k+1) + k(k+1) = 3k(k+1) \quad \square$$

(c) Demuestre que

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

es un número entero y además par, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$

Solución:

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{2})^k =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\sqrt{2})^k + (-\sqrt{2})^k]$$

Sabemos que para cualesquiera valores de $n, k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq k \leq n$ se tiene que $\binom{n}{k}$ es un número entero.

Si k es impar se tiene que $(-\sqrt{2})^k = -(\sqrt{2})^k$, luego si k es impar se tiene que $(\sqrt{2})^k + (-\sqrt{2})^k = 0$.

Si k es par, entonces $k = 2t$ para cierto $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en este caso, $(-\sqrt{2})^k = (\sqrt{2})^k = 2^t$, luego si k es par se tiene que $(\sqrt{2})^k + (-\sqrt{2})^k = 2 \cdot 2^t$, un número par.

Entonces tenemos que

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\sqrt{2})^k + (-\sqrt{2})^k]$$

es la suma de números pares, por lo tanto es par. $\square$

2. Encuentre todos los números reales tales que

$$x^2 \leq 3x$$

Solución:

Si $x \leq 0$ entonces $(x - 3) < 0$ de donde se obtiene que $x(x - 3) \geq 0$, por lo tanto

$$x^2 \geq 3x.$$

Luego ningún valor negativo satisface la desigualdad.

Si $0 < x < 3$, se tiene que $x - 3 < 0$ luego $x(x - 3) < 0$, por lo tanto $x^2 < 3x$. Entonces si $0 < x < 3$ satisface la desigualdad del enunciado.

Si $x \geq 3$ es equivalente a decir que $x - 3 \geq 0$ lo cual implica que $x(x - 3) \geq 0$, por lo tanto $x^2 \geq 3x$. Luego ningún valor de x tal que $x \geq 3$ satisface la desigualdad.

Luego el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < 3x$ es $(0, 3)$ $\square$

3. La urna 1 tiene una bola blanca y 10 negras, la urna 2 tiene 2 bolas blancas y 9 negras, la urna 3 tiene 3 bolas blancas y 8 negras, la urna 4 tiene 4 bolas blancas y 7 negras. Se saca una bola de la urna 1, si sale blanca se gana el juego, si sale negra se saca una bola de la urna 2, si sale blanca se gana el juego, si sale negra, se saca una bola de la urna 3, si sale blanca se gana el juego, si sale negra, se saca una bola de la urna 4, si sale blanca se gana el juego si sale negra se pierde el juego. ¿Cuál es la probabilidad de perder el juego?

Solución:

Para perder el juego es necesario sacar una bola negra de todas las urnas, como esos sucesos son independientes, la probabilidad de perder