Primera Prueba de Matemáticas[*]I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

30 de Abril, 2007.

Tiempo: 2 horas.

Nombre:

1. Elije 2 de los siguientes problemas y resuélvelos:

   a) Demuestra que

$$\sum_{k=0}^{7}(\sqrt{5})^{7-k}(\sqrt{4})^{k} = 369(\sqrt{5}+\sqrt{4})$$

   (Ayuda: $5^4 = 625,\ \ 4^4 = 256, \quad 625 - 256 = 369$)

   Solución:

$$\sum_{k=0}^{7}(\sqrt{5})^{7-k}(\sqrt{4})^{k} = (\sqrt{5})^{7}\sum_{k=0}^{7}\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)^{k} =$$

$$(\sqrt{5})^{7}\sum_{k=0}^{7}\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)^{k} = (\sqrt{5})^{7}\left[\frac{1-\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)^{8}}{1-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}}\right] =$$

$$(\sqrt{5})^{7}\left[\frac{\frac{5^4-4^4}{(\sqrt{5})^8}}{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5}}}\right] = \frac{5^4-4^4}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} = \frac{369}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = 369(\sqrt{5}+\sqrt{4})$$

   b) Calcula el valor de la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}$$

   Solución:

[*]Como en toda prueba de Matemáticas, debe demostrar todas sus afirmaciones, y sólo puede asumir como ciertos aquellos resultados que fueron demostrados en la clase dde cátedra.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} =$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\times 1^{n-k}\times\binom{n}{k} = 1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\times 1^{n-k}\times\binom{n}{k} = 1-(1-1)^n = 1$$

c) Considera $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Demuestra que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})(1+x^{2^4})\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$$

Solución: Haremos Inducción sobre n.

Para $n = 1$, se tiene que

$$(1+x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1}$$

Por lo tanto para $n = 1$ se cumple la igualdad del enunciado.

Asumamos que la igualdad del enunciado se cumple para n, es decir, se tiene que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})(1+x^{2^4})\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$$

Ahora consideremos la expresión

$$\underbrace{(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})(1+x^{2^4})\cdots(1+x^{2^{n-1}})}_{\text{Hip. Inductiva}}(1+x^{2^n}) =$$

$$\frac{x^{2^n}-1}{x-1}\times(1+x^{2^n}) = \frac{\overbrace{x^{2^{n+1}}-1}^{\text{suma por su diferencia}}}{x-1}$$

Por lo tanto la igualdad del enunciado es también cierta para $n+1$.

Entonces para cualquier valor de $x \neq 1$ y de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})(1+x^{2^4})\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$$

Elije entre 2 y 2'

2. Encuentra[1] el ínfimo y el supremo de

$$A = \left\{ \frac{2n-3}{1-n} / \ n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \right\}$$

Solución:

Primero notamos que si $n \neq 1$ se tiene que

$$\frac{2n-3}{1-n} = \frac{2n-2-1}{1-n} = -2 + \frac{1}{n-1}$$

Además observamos que $-1 \in A$, de hecho,

$$-1 = -2 + \frac{1}{2-1}$$

También observamos que si existiese $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ tal que

$$-2 + \frac{1}{n-1} > -1$$

se tendría que

$$\frac{1}{n-1} > 1$$

o equivalentemente

$$1 > n-1$$

o equivalentemente

$$2 > n$$

Lo que es una contradicción, luego para todo $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ se tiene que

$$-2 + \frac{1}{n-1} \leq -1$$

Lo que quiere decir que -1 es cota superior de A. Como además $-1 \in A$ se tiene que $-1 = sup(A)$.

Por otra parte si $n \in \mathbb{N}, n \neq 1$ entonces

$$\frac{1}{n-1} > 0$$

por lo tanto

$$-2 + \frac{1}{n-1} > -2$$

Luego -2 es cota inferior de A.

[1] Recuerda que debes demostrar que tus hallazgos son correctos.

Por otra parte si $\varepsilon > 0$ se tiene que existe (Por prop. Arq.) $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} < m$$

Como $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $m + 1 \in \mathbb{N}$, denotemos $m + 1 = n$, por lo tanto $n \geq 2$ y se tiene

$$\frac{1}{\varepsilon} < n - 1$$

o equivalentemente

$$\varepsilon > \frac{1}{n-1}$$

o equivalentemente

$$-2 + \varepsilon > 2 + \frac{1}{n-1}$$

Pero

$$a = -2 + \frac{1}{n-1} \in A$$

Luego Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$-2 + \varepsilon > a$$

Luego -2 es el ínfimo de A.

2'. Considera los números a y ε tales que $0 < \varepsilon < a$.

a) Demuestra que $0 \notin A = \{x \in \mathbb{R} / \ |x - a| < \varepsilon\}$

Solución:

El conjunto $A = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, además como $a > \varepsilon$ se tiene que $a - \varepsilon > 0$ por tanto si $x \in A$ se tiene que

$$0 < a - \varepsilon < x$$

Luego $0 \notin A$.

b) Demuestra que si $|x - a| < \varepsilon$, entonces

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \frac{\varepsilon}{a(a-\varepsilon)}$$

Solución:

Recordemos que $|x - a| < \varepsilon$ si y solo si $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < |\frac{a-x}{ax}| = \frac{|a-x|}{ax} < \frac{\varepsilon}{ax}$$

pero como $a - \varepsilon < x$ se tiene que

$$\frac{\varepsilon}{ax} < \frac{\varepsilon}{a(a-\varepsilon)}$$

Luego se tiene que:

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \frac{\varepsilon}{a(a-\varepsilon)}$$

3. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = |x-1|$ y $g(x) = -x+5$. Encuentra todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) \leq g(x)$$

<u>Solución:</u>

Buscamos los x tales que:

$$|x-1| \leq 5-x \tag{1}$$

<u>Caso 1:</u> $x \leq 1$

$x \leq 1$ si y solo si $x-1 \leq 0$, por lo tanto $|x-1| = 1-x$

De modo que en este caso la ecuación (1) es equivalente a

$$1-x \leq 5-x$$

$$1 \leq 5$$

Por lo tanto todos los x de este caso son solución. Es decir,

$$S_1 = (-\infty, 1]$$

<u>Caso 2:</u> $x > 1$

$x > 1$ si y solo si $x-1 > 0$, por lo tanto $|x-1| = x-1$

De modo que en este caso la ecuación (1) es equivalente a

$$x-1 \leq 5-x$$

$$2x \leq 6$$

$$x \leq 3$$

Por lo tanto, la solución en este caso es:

$$S_2 = (1, 3]$$

Entonces el conjunto de todos los números reales x tales que $f(x) \leq g(x)$ es

$$S = (-\infty, 3]$$

4. Un juego se juega con monedas y un dado. Primero lanzas el dado y luego lanzas tantas monedas como marca el dado. Ganas si obtienes tres *caras* o más. ¿De cuántas maneras distintas puedes ganar el juego?

   Solución:

   Notar que si en el dado sale 1 o 2 no hay chances de ganar.

   Entonces $(3; c, c, c)^2$ es la única manera de obtener 3 en el dado y ganar.

   Si sale 4 en el dado, podemos ganar obteniendo 4 caras, que se logra de una única forma, a saber $(4; c, c, c, c)$. Y también podemos ganar obteniendo exactamente tres caras y esto se logra de $\binom{4}{3} = 4$ formas distintas.

   Si sale 5 en el dado podemos ganar de obteniendo 5 caras, que se logra de una única forma, a saber $(5; c, c, c, c, c)$. También podemos ganar obteniendo exactamente 4 caras, y esto se logra de $\binom{5}{4} = 5$ formas distintas. Y también podemos ganar obteniendo exactamente tres caras y esto se logra de $\binom{5}{3} = 10$ formas distintas.

   Si sale 6 en el dado podemos ganar de obteniendo 6 caras, que se logra de una única forma, a saber $(6; c, c, c, c, c, c)$. También podemos ganar obteniendo exactamente 5 caras, y esto se logra de $\binom{6}{5} = 6$ formas distintas. También podemos ganar obteniendo exactamente 4 caras y esto se logra de $\binom{6}{4} = 15$ formas distintas.Y también podemos ganar obteniendo exactamente tres caras y esto se logra de $\binom{6}{3} = 20$ formas distintas.

   Por lo tanto, la cantidad de distintas formas de ganar es:

$$1 + (1 + 4) + (1 + 5 + 10) + (1 + 6 + 15 + 20) = 64$$

[2] Notación: Denotaré por $(a; x_1, x_2, \ldots, x_a)$ si sale a en el dado y si en la $k-$ésima moneda sale x_k.