# Quinto Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Otoño, 2005

Tiempo:15 minutos.

**Nombre:**

**Elija solo uno de los siguientes problemas.**

1. Sen $a, \epsilon$ números positivos y $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| < \epsilon$. Demuestre que

$$|x^2 - a^2| < \epsilon(\epsilon + 2a).$$

Solución:

Notar primero que

$$|x - a| < \epsilon \;\Leftrightarrow -\epsilon < x - a < \epsilon \;\Leftrightarrow 2a - \epsilon < x + a < \epsilon + 2a$$

pero como $a > 0$ se tiene que $-2a - \epsilon < 2a - \epsilon$.

Luego se tiene que

$$-2a - \epsilon < x + a < 2a + \epsilon$$

o lo que es lo mismo

$$|x + a| < \epsilon + 2a$$

[**4 puntos**]

Entonces tenemos que:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| < \epsilon(\epsilon + 2a) \quad \square$$

**[2 puntos]**

2. Encuentre todos los números reales tales que

$$||4x - 1| - 3| < 1$$

<u>Solución:</u>

Recordemos que si $a > 0$, entonces

$$|x| < a \;\Leftrightarrow -a < x < a$$

y que

$$|x| > a \;\Leftrightarrow -a > x \text{ ó } x > a$$

Entonces

$$||4x - 1| - 3| < 1 \;\Leftrightarrow -1 < |4x - 1| - 3 < 1 \;\Leftrightarrow 2 < |4x - 1| < 4$$

**[1 punto]**

Pero sabemos que

$$2 < |4x - 1| < 4 \;\Leftrightarrow 2 < |4x - 1| \text{ y } |4x - 1| < 4$$

Entonces el conjunto solución del problema es la intersección de las soluciones de

$$2 < |4x - 1|$$

y de

$$|4x - 1| < 4$$

Notamos que

$$|4x-1|<4 \ \Leftrightarrow -4<4x-1<4 \ \Leftrightarrow \frac{-3}{4}<x<\frac{5}{4} \ \Leftrightarrow x\in\left(\frac{-3}{4},\frac{5}{4}\right)=S_1$$

**[2 puntos]**

Notamos que

$$|4x-1|>2 \ \Leftrightarrow 4x-1>2 \text{ ó } 4x-1<-2 \ \Leftrightarrow \frac{3}{4}<x \text{ ó } x<\frac{-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{4},\infty\right)\cup\left(-\infty,\frac{-1}{4}\right)=S_2$$

**[2 puntos]**

Como dijimos antes la solución al problema es la intersección de $S_1$ con $S_2$, esto es

$$S=\left(\frac{-3}{4},\frac{-1}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) \quad \square$$

**[1 punto]**