

Primer Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2006

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes

1. Encuentra el valor de la suma de todos los números pares entre $2n - 1$ y $4n + 1$.

Solución:

Los números pares entre $2n - 1$ y $4n + 1$ son

$$2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, \dots, 2n + 2n = 4n.$$

[2 puntos]

Entonces la suma de esos números es

$$\sum_{k=0}^n 2n + 2k$$

[1 punto]

$$\sum_{k=0}^n 2n + 2k = 2n \sum_{k=0}^n 1 + 2 \sum_{k=0}^n k$$

[1 punto]

$$\sum_{k=0}^n 2n + 2k = 2n \sum_{k=0}^n 1 + 2 \sum_{k=0}^n k = 2n(n+1) + n(n+1) = 3n(n+1) \square$$

[2 puntos]

Si en vez de poner $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$, escriben n , no castigar mucho, solo 2 décimas.

2. Solución:

La conjetura es

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

[1 punto]

La afirmación es cierta para $n = 2$, de hecho $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

[1 punto]

Supongamos cierta la afirmación para n , es decir

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \\ \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Entonces la afirmación es cierta para $n + 1$.

Luego para todo $n \geq 2$ se tiene que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

[4 puntos]