

Segundo Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

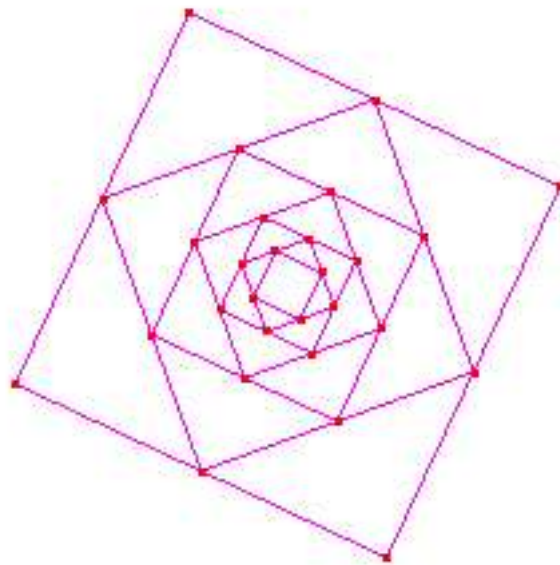
Marzo, 2007.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema

1. En un cuadrado se unen los puntos medios de cada lado y se forma un cuadrado. Del mismo modo, se unen los puntos medios de los lados del cuadrado antes construido y se forma un nuevo cuadrado. Recursivamente, dado un cuadrado como los de antes, se unen los puntos medios de cada lado y se forma un nuevo cuadrado. Si sumamos las áreas de estos cuadrados, ¿alcanzan a sumar el área de dos cuadrados como el primero?



Solución:

Sea a la medida del lado del cuadrado inicial, entonces el área de dicho cuadrado es

$$A_0 = a^2$$

Uniando los puntos medios de los lados del cuadrado inicial, obtenemos un primer cuadrado de lado $\frac{a}{\sqrt{2}}$, entonces el área de este nuevo cuadrado es

$$A_1 = \frac{a^2}{2}$$

Uniando los puntos medios de los lados del cuadrado anterior, obtenemos un segundo cuadrado de lado $\frac{a}{2}$ y área

$$A_2 = \frac{a^2}{4}$$

Haciendo nuevamente el proceso, obtenemos un tercer cuadrado de lado $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ y área

$$A_3 = \frac{a^2}{8}$$

1 punto.

Procediendo recursivamente, se tiene que el área del n -ésimo cuadrado es

$$A_n = \frac{a^2}{2^n}$$

1 punto.

La suma de las áreas de estos cuadrados hasta el proceso n -ésimo es

$$S = \sum_{k=0}^n \frac{a^2}{2^k}$$

1 punto.

Notar que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \frac{a^2}{2^k} \\ &= a^2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

1 punto.

Entonces

$$\begin{aligned} S &= a^2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= a^2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2a^2 - 2a^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

1 punto.

Se pregunta si $S < 2a^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, como $2a^2(\frac{1}{2})^{n+1} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$S = 2a^2 - 2a^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} < 2a^2$$

Por tanto

$$S < 2a^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

1 punto.

2. Sean A y B dos conjuntos de puntos en el plano tal que A y B son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$). Supongamos que A tiene m puntos y B tiene n puntos. Cuántas aristas se pueden formar tal que toda arista tenga al menos un extremo en A ?

Solución:

Se pregunta por la cantidad de aristas que tengan al menos un punto extremo en A , es decir por la cantidad de aristas con los dos puntos extremos en A o con un punto extremo en A y el otro en B .

1 puntos.

Calculemos las aristas cuyos dos puntos extremos estan en A .
 Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, entonces el número de aristas con puntos extremos a_i y a_j con $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ es

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

puesto que la arista con puntos extremos a_i y a_j es la misma arista con puntos extremos a_j y a_i

2 puntos.

Ahora calculamos las arista con un punto extremo en A y el otro en B .
 Si $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, entonces el número de aristas con puntos extremos a_i y b_j con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ es

$$mn$$

2 puntos.

Por tanto el número de aristas con al menos un punto extrmo en el conjunto A es

$$\frac{m(m-1)}{2} + mn$$

1 punto.