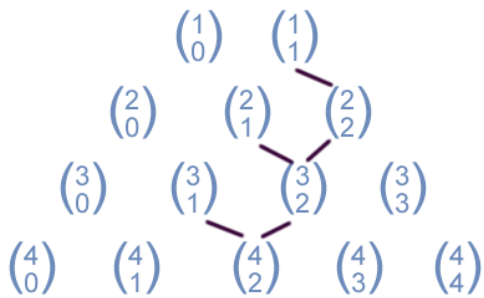
Problema 17 tercera guia. La proposición k) es verdadera. La prueba es recordando el triangulo de pascal.
A continuacion vemos cual es la idea de la prueba para el caso $n = 3$ y $p = 1$



$$\begin{aligned}
\binom{4}{2} &= \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \\
&= \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\
&= \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \binom{k}{1}
\end{aligned}$$

En general lo que estamos usando es

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

así usando esta igualdad, pero aplicada al último termino se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{p+1} &= \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \\
&= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p+1} \\
&= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p+1} \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \cdots + \binom{p}{p}
\end{aligned}$$

Problema 5 Considere el proceso de lanzar un dado. Suponga que obtuvo el número n que esta entre 1 y 6 y luego lance una moneda n veces.

1. Para n lanzamientos, cuente todas las posibles opciones de obtener cara o sello tiene.
2. Para n lanzamientos cuantas opciones solo tienen 1 cara. Cuantas opciones tienen al menos 2 caras?
3. Para n lanzamientos cuantas opciones solo tienen 2 caras.
4. Para n lanzamientos cuantas opciones solo tienen k caras.
5. Considerando el proceso completo, de cuantas maneras se pueden obtener k caras.

solución

para $n = 1$, se tiene que al lanzar una moneda solo se pueden obtener 2 soluciones, que salga cara o que salga sello.

si $n = 2$ tenemos $4 = 2 \cdot 2$ opciones, ojo la primera moneda tiene 2 opciones y la segunda tambien 2 y asi por principio multiplicativo tenemos 4. Estas son

$$CC \qquad CS \qquad SC \qquad SS$$

Así en general, como lanzamos la moneda $n-$veces y por cada lanzamiento se tienen 2 opciones, el total de posibilidades es 2^n.

Ahora para calcular cuantas opciones solo tienen 1 cara debemos notar que importa el orden de los lanzamientos. Esto significa si sale cara en el primer lanzamiento es distinto a que salga en el ultimo, a pesar de que al final para ambos casos en total se tiene una cara y $n-1$ sellos.
Estudiemos el caso $n=2$ que escribimos antes. En ese caso se obtiene que las opciones de obtener una cara son

$$CS \qquad SC$$

Notemos que las posibilidades son que salga una cara en el primer lanzamiento y el resto no y la otra opcion es que salga cara en el segundo lanzamiento. Es decir estamos contando el numero de subconjuntos de 1 elemento se pueden a partir de n elementos. Cada subconjunto que encontramos representa un lanzamiento y lo que buscamos es que este sea cara. Asi las opciones de obtener una cara para n lanzamiento son n.

Las que tienen al menos dos caras seran el total menos las que tienen solo 1 cara, es decir

$$2^n - n$$

Estudiemos el caso $n=3$ y veamos las posibles opciones de obtener 2 caras.
Para este caso se tiene que todas las posibles opciones son

$$CCC \quad CCS \quad CSC \quad SCC \quad CSS \quad SCS \quad SSC \quad SSS$$

Vemos que las opciones de obtener solo 1 cara son 3.
Las opciones de obtener solo 2 caras son 3. Estas corresponden a CCS, CSC, SCC es decir caras en el primer y segundo lanzamiento, luego en el primero y el tercero y luego en el segundo y el tercero. Esto corresponde a ser el numero de subconjuntos de 2 elementos a partir de un conjunto de 3, donde en este caso el conjunto corresponde a ser el conjunto de 3 lanzamientos y buscamos los posibles subconjuntos de 2 donde ubicar las dos caras.
Por esta razon el número de posibles opciones de obtener 2 caras coincide con el número combinatorio

$$\binom{3}{2}$$

Así para n lanzamientos [ojo que se estan distinguiendo los lanzamientos y ahi esta la gracia] hay

$$\binom{n}{2}$$

posibilidades de obtener solo 2 caras.

Generalizando la idea anterior se tiene que para obtener k caras las posibilidades son:

$$\binom{n}{k}$$

Ahora al considerar el proceso completo, debemos contar todas las posibilidades partiendo que en el dado haya salido $n = 1$ hasta $n = 6$.
Debemos tener presente que si $n = 1$ es imposible obtener 2 caras, asi para contar cuantas k caras debemos partir de $n = k$.

Esto significa que sumaremos cada uno de los números obtenidos para k caras con $n = k$ hasta $n = 6$. Así tenemos:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{6}{k} = \sum_{j=k}^{6} \binom{j}{k}$$

y esta suma es la que aparece en el ejercicio 17. k) que probamos antes, luego:

$$\sum_{j=k}^{6} \binom{j}{k} = \binom{7}{k+1}$$