

Pauta Control 3 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 15 de Abril, 2010

Tiempo : 15 minutos .

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sean A y B dos conjuntos de puntos en el plano tal que A y B son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$). Supongamos que A tiene n puntos y B tiene m puntos. ¿Cuántos segmentos se pueden formar tales que los puntos extremos de ellos estén sólo en A ó sólo en B ó en ambos conjuntos?.

Solución:

Sean $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Entonces el número de segmentos con puntos extremos a_i y a_j con $i \neq j$ y $i, j \in \{1, \dots, n\}$ es

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Notar que el segmento de puntos extremos a_i y a_j es el mismo segmento de puntos extremos a_j y a_i .

Analogamente, el número de segmentos con puntos extremos b_i y b_j con $i \neq j$ y $i, j \in \{1, \dots, m\}$ es

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

Por último, el número de segmentos con punto extremo en A , digamos a_i y el otro en B , digamos b_j es

$$nm$$

Por tanto el número de segmentos que se pueden formar es

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + nm$$

Observación: Es importante notar que en cualquier formato que presente el resultado correcto, se considerará puntaje máximo, por ejemplo

$$\binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$$

2. Una urna tiene 49 bolitas numeradas de las cuales 7 son premiadas. Se extraen 7 bolitas al azar sin devolución. ¿De cuántas maneras distintas pueden salir al menos 5 bolitas premiadas?.

Solución:

Decir que salgan al menos 5 bolitas premiadas, es lo mismo que decir que salgan 5 bolitas premiadas o 6 bolitas premiadas o 7 bolitas premiadas.

Contemos separadamente.

Existe una única forma de obtener 7 bolitas premiadas de un total de 7 bolitas premiadas.

Existen 7 formas de dejar una bolita premiada en la urna y 42 formas de sacar una bolita no premiada. por tanto hay $7 \cdot 42$ maneras de obtener exactamente 6 bolitas premiadas.

Existen $\binom{7}{2} = 21$ maneras de dejar 2 bolitas premiadas en la urna y

$\binom{42}{2} = 21 \cdot 41$ maneras de sacar dos bolitas no premiadas. por tanto hay $21 \cdot 21 \cdot 41$ maneras de obtener exactamente 5 bolitas premiadas.

Entonces existen $1 + 7 \cdot 42 + 21 \cdot 21 \cdot 41$ maneras de obtener al menos 5 bolitas premiadas.

Obervación: Es importante notar que en cualquier formato que presente el resultado correcto, se considerará puntaje maximo, por ejemplo

$$\binom{7}{7} \binom{42}{0} + \binom{7}{6} \binom{42}{1} + \binom{7}{5} \binom{42}{2}$$