Prueba Global de Matemáticas I

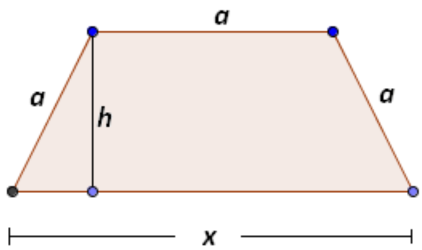
Programa de Bachillerato. Universidad de Chile

30 de Junio, 2009

Nombre:

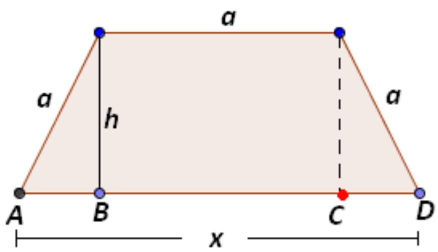
Tiempo: 2 horas.

1. Se quiere construir un trapecio isósceles, el cual tiene al menos tres lados de igual medida, digamos a, como muestra la figura. Si el otro lado lo denotamos por x, determina el valor de x que maximiza el área. Justifique su respuesta.



Solución:

Notemos primero que $\overline{AB} = \overline{CD} = \delta$, entonces el área del trapecio es:



$$A(x, h, \delta) = ah + 2 \times \frac{\delta h}{2}$$

Pero como $x - 2\delta = a$ y $\delta^2 + h^2 = a^2$ se tiene que:

$$A(x) = \frac{1}{4}(a + x)\sqrt{4a^2 - (x - a)^2}$$

donde $x \in (0, 3a)$

Derivando respecto a x se obtiene:

$$A'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4a^2 - (x-a)^2}}(2a^2 + ax - x^2)$$

$$A'(x) = \frac{(a + x)}{2\sqrt{4a^2 - (x-a)^2}}(2a - x)$$

Observar que $x+a$ es siempre positivo, lo mismo que $2\sqrt{4a^2 - (x-a)^2}$. Por lo tanto el signo de la derivada, en nuestro problema depende exclusivamente de $(2a - x)$.

Notar que si $0 < x < 2a$, entonces $A'(x)$ es positiva, por lo tanto A es creciente en $(0, 2a)$.

Del mismo modo, si $2a < x < 3a$, entonces $A'(x)$ es negativa, por lo tanto A es decreciente en $(2a, 3a)$.

Luego en $x = 2a$ la función tiene un máximo.

Resuelve solo un problema entre 2 y 3.

2. El diámetro de una herida circular en la piel de un paciente, crece a razón de $0,05$ mm por hora. ¿A qué razón crece el área de la herida, cuando su diámetro es de medio centímetro?

   Solución:

   $$A(t) = \frac{\pi}{4}d^2(t)$$

   $$A'(t) = \frac{\pi}{2}d(t)d'(t)$$

   Si t_1 es tal que $d(t_1) = 5$ mm, entonces:

   $$A'(t_1) = \frac{\pi}{2}d(t_1)d'(t_1) = \frac{\pi}{2} \cdot 5 \cdot 0,05 = 0,0125\pi \approx 0,04\frac{mm^2}{\text{hora}}$$

3. Un monje parte a las 6:00 de la mañana, desde la cima del monte donde está su monasterio, hasta llegar al monasterio del valle a las 22:00 horas del mismo día. Realiza sus oraciones y se duerme. Al otro día, parte a las 6:00 de la mañana, del monasterio del valle y sube al monasterio del monte, tomando exactamente el mismo sendero que el día anterior. Al mostario del monte llega a las 22:00 de ese mismo día.

¿ Es cierto que hay una hora en que ambos días estaba exactamente en el mismo punto del sendero?

Solución:

Sea $t \in [0, 16]$ medido en horas. Denotemos por $f(t)$ la posición del monje en el sendero, t horas después de las $6:00$, cuando va de bajada; y por $g(t)$ la posición del monje en el sendero, t horas después de las $6:00$, cuando va de subida.

$$\boxed{\text{P.d: } \exists \xi \in (0,16) \text{ tal que } f(\xi) = g(\xi)}$$

Si el sendero mide K kilómetros, para denotar la posición del monje en el sendero, basta decir que está a x kilómetros (en el sendero), del monasterio del valle. Por lo tanto podemos denotar cualquier punto del sendero por $x \in [0, K]$, donde 0 representará el monasterio del valle y K el Monasterio del Monte. Por lo tanto

$f(0) = K$ y $f(16) = 0$, en cambio $g(0) = 0$ y $g(16) = K$.

Como ambas funciones son continuas, pues el monje respeta las leyes de la física, se tiene que la función $F(t) = f(t) - g(t)$ es continua. También tenemos que $F(0) = K > 0$ y $F(16) = -K$. Por el teorema de Bolzano se tiene que existe $\xi \in (0, 16)$ tal que $F(\xi) = 0$, por lo tanto. Existe $\xi \in (0, 16)$ tal que $f(\xi) = g(\xi)$.

4. Elije dos de los siguientes límites y calcúlalos:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{|x|\sqrt{|x|}}$

   Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{|x|\sqrt{|x|}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \times \sqrt{|x|} = 1 \times 0 = 0$$

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\cos(x)}{x^2 + 1}$

   Solución:

   Si $x > 0$

$$0 \leq |\frac{x\cos(x)}{x^2+1}| \leq \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

   Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0$, por teorema del sandwich se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} |\frac{x\cos(x)}{x^2+1}| = 0$$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\cos(x)}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\tan(x) - \sin(x^2)}{x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \times \frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 - 1 = 0$$

5. Considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{(x-1)^2}$
Grafica f indicando intersección con los ejes, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad, de convexidad, puntos de inflexión, máximos, mínimos y asíntotas.

Solución:

Notamos que $f(0) = 4$, entonces la intersección del gráfico con el eje Y es en $(0, 4)$. Notamos además que

$$f(x) = \frac{(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}}{(x-1)^2} > 0, \;\; \forall x \neq 1$$

En particular f no intersecta el eje X. De hecho, está siempre por sobre el eje X.

Notamos además que

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{0}{2} = 0$$

y como f es positiva se tiene que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{(x-1)^2} = \infty$$

Por lo tanto la recta de ecuación $x = 1$, es una asíntota vertical para el gráfico de f.

Además

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 3\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 = \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Por lo tanto la recta de ecuación $y = 1$, es una asíntota horizontal para el gráfico de f.

La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1) - 2(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 6x - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x-5}{(x-1)^3}$$

Si $x < 1$ se tiene que $x - 5 < 0$ y $(x-1)^3 < 0$. Por lo tanto $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, lo que implica que f es creciente en $(-\infty, 1)$.

Si $1 < x < 5$ se tiene que $x - 5 < 0$ y $(x-1)^3 > 0$. Por lo tanto $f'(x) < 0$ en $(1, 5)$, lo que implica que f es decreciente en $(1, 5)$.

Si $x > 5$ se tiene que $x - 5 > 0$ y $(x-1)^3 > 0$. Por lo tanto $f'(x) > 0$ en $(5, \infty)$, lo que implica que f es creciente en $(5, \infty)$.

Por lo tanto en $x = 5$ hay un mínimo para f. Su valor mínimo es

$$f(5) = \frac{25 - 15 + 4}{4^2} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} < 1$$

Calculemos la segunda derivada de f.

$$f''(x) = \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x-5)}{(x-1)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(x-1) - 3(x-5)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^4} \times (7 - x)$$

Como para cualquier $x \neq 1$, se cumple que $\dfrac{2}{(x-1)^4} > 0$, entonces el signo de la segunda derivada depende excluivamente de $7 - x$.

Por lo tanto si $x < 7$, se tiene que $f''(x) > 0$, lo que implica que f es convexa en $(-\infty, 1)$ y en $(1, 7)$

Del mismo modo si $x > 7$, se tiene que $f''(x) < 0$, lo que implica que f es cóncava en $(7, \infty)$.

Por lo tanto hay un único punto de inflexión y se encuentra en $x = 7$.