Segunda Prueba de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

30 de Mayo, 2009.

Tiempo: 2 horas.

Nombre:

1. Elija entre a y b

   a) Calcula el límite $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^3-x^2+2x-1}{2x-1}$.

   Si evaluamos, resulta de la forma $0/0$, por lo tanto si $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ se tiene que $p(1/2) = 0$. Por lo tanto $2x - 1$ divide a p, haciendo la divisi´n se obtiene:

   $$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^3-x^2+2x-1}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x^2+1)(2x-1)}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} x^2+1 = \frac{5}{4}$$

   b) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -5x + 4$. Considera además el intervalo $J = (3-10^{-2}, 3+10^{-2}))$. Encuentra un intervalo I para el cual se cumpla que si $x \in I$, entonces $f(x) \in J$.

   Solución:
   Como $\lim_{x\to\frac{1}{5}} = 3$ y como la función amplifica por 5 el largo de los intervalos se tiene que basta tomar

   $$I = \left(\frac{1}{5} - \frac{10^{-2}}{5}, \frac{1}{5} + \frac{10^{-2}}{5}\right)$$

   para asegurar lo que se pide, de hecho, si $x \in I$ se tiene que

   $$\frac{1}{5} - \frac{10^{-2}}{5} < x < \frac{1}{5} + \frac{10^{-2}}{5}$$
   $$-1 + 10^{-2} > -5x > -1 - 10^{-2}$$
   $$3 + 10^{-2} > -5x + 4 > 3 - 10^{-2}$$

   es decir, $f(x) \in J$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sin(x) - x$. Elije tres de las siguientes preguntas y respondelas, argumentando tus respuestas.

   a) ¿Existe $\alpha \neq 0$ tal que $f(\alpha) = \alpha$?

   Solución: Si tal α existiera, $\alpha\sin(\alpha) - \alpha = \alpha$ como $\alpha \neq 0$ se tiene que $\sin(\alpha) = -2$ lo cual no tiene solución pues $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ para cualquier valor de α.

   b) ¿Es f inyectiva?

   Solución: No, pues $f(0) = 0$, y además si $\sin(x) = 1$, se tiene que $f(x) = x\sin(x) - x = 0$, por ejemplo $f(\pi/2) = 0$.

   c) ¿Es f creciente?

   Solución: No, pues $f(-\pi) = \pi$, y $f(\pi) = -\pi$.

   d) Si $x > 0$, ¿Es cierto que $f(x) \leq 0$?

   Solución: Si, pues si $x > 0$, entonces $f(x) = x\sin(x) - x = x(\sin(x) - 1)$, pero como $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, se tiene que $\sin(x) - 1 \leq 0$, por lo tanto, si $x > 0$, entonces $f(x) = x\sin(x) - x = x(\sin(x) - 1) \leq 0$

   e) ¿Cuáles son todos los valores β tal que $f(\beta) = 0$?

   Solución: Claramente $\beta = 0$ es uno de ellos. Si $\beta \neq 0$ y $f(\beta) = 0$, entonces $\sin(\beta) - 1 = 0$. Es decir, $\beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ o bien $\beta = 0$.

3. Encuentre todos los números reales α tal que

$$2\cos^3(\alpha) + 11\cos^2(\alpha) + 17\cos(\alpha) + 6 = 0$$

   (**Ayuda:** Estudie las raíces del polinomio

$$p(x) = 2x^3 + 11x^2 + 17x + 6)$$

   Solución:

   Estudiando las raíces racionales de p vemos que -2 es uan de ellas. Haciendo la división de p en $x + 2$ resulta un cuociente de grado 2 al cual se les puede encontrar las raíces usando la formula o completando cuadrados y resulta $p(x) = (x + 2)(x + 3)(2x + 1)$. Es decir:

$$2\cos^3(\alpha)+11\cos^2(\alpha)+17\cos(\alpha)+6 = 0 = (\cos(\alpha)+2)(\cos(\alpha)+3)(2\cos(\alpha)+1) = 0$$

   Como $|cos(\alpha)| \leq 1$ se tiene que el único factor que es cero es

$$2\cos(\alpha) + 1,$$

es decir

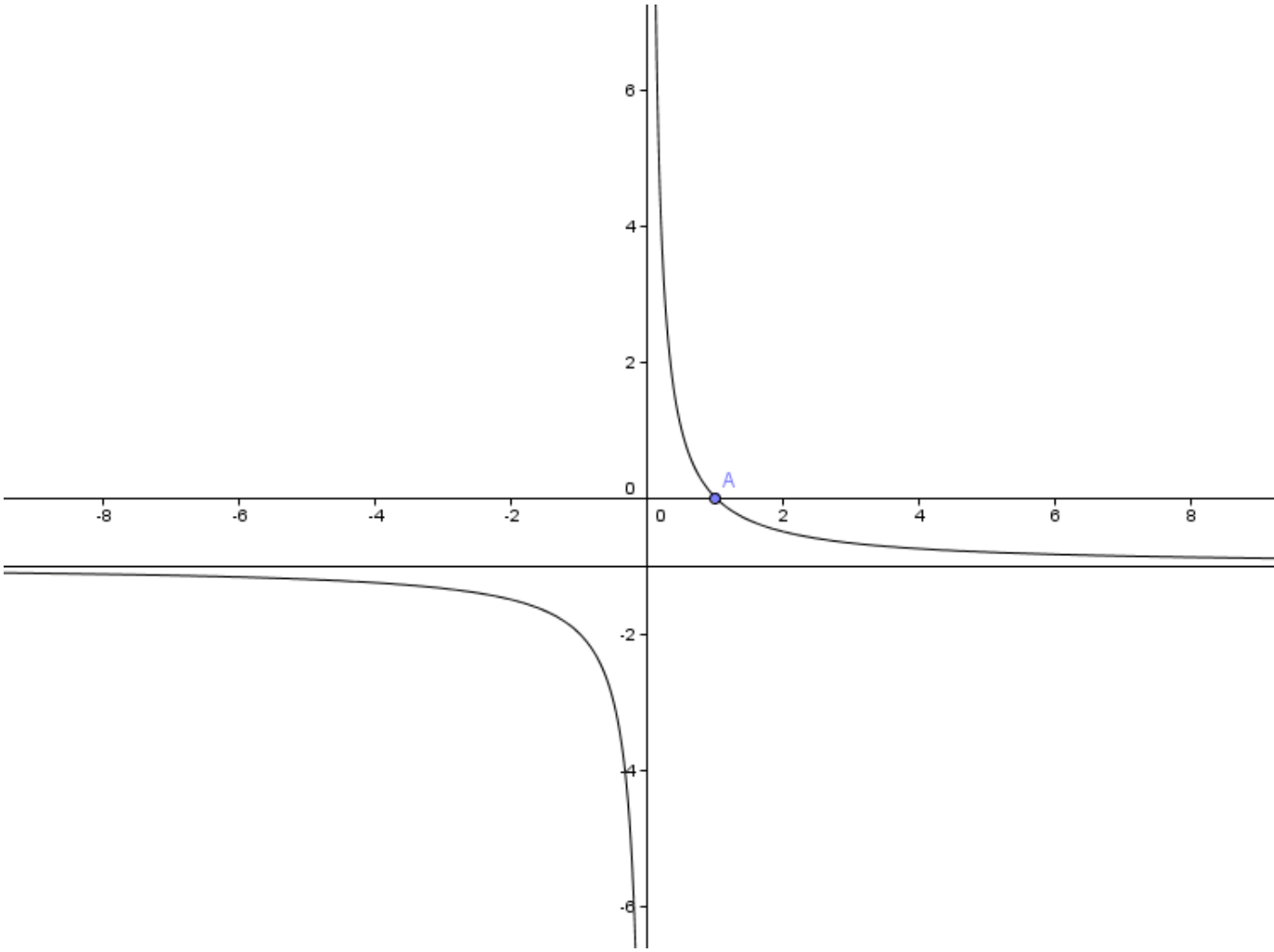
$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Es decir

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{o bien,} \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

4. Considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

a) Grafica f, indicando intersección con los ejes y asíntotas.



b) Determina el ínfimo de $A = \{f(n)/\ n \in \mathbb{N}\}$

Solución: Primero notar que

$$\frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1$$

Como

$$\frac{1}{n} > 0$$

se tiene que

$$\frac{1}{n} - 1 > -1$$

Luego -1 es cota inferior de A.

Si -1 no es ínfimo, existe un número α mayor que -1 que es cota inferior de A. Luego $\frac{1+\alpha}{2} > 0$. Por propiedad arquimideana se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ y $N > \frac{2}{1+\alpha}$ o lo que es lo mismo

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{1+\alpha}{2}$$

$$-1 < \frac{1}{N} - 1 < -1 + \frac{1+\alpha}{2} < \alpha$$

Lo que contradice el hecho de que α es cota inferior.

$$inf(A) = -1$$