Solución Primera Prueba de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2009.

1. Elija un problema entre *b*) y *c*) y resulvalo.

   a) Encuentra todos los números reales tales que

   $$|2x+1| - |x+5| > 0 \tag{1}$$

   <u>Solución:</u>

   <u>Caso 1: $x \leq -5$</u>

   En este caso $2x+1 < 0$ y $x+5 < 0$, por lo tanto $|2x+1| = -2x-1$ y $|x+5| = -x-5$. Entonces en este caso (1) se expresa como:

   $$\begin{aligned} -2x-1-(-x-5) &> 0 \\ -x+4 &> 0 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

   Entonces en este caso todos los valores son solución de la inecuación. Es decir,

   $$S_1 = (-\infty, -5]$$

   $$\boxed{\text{0,8 puntos}}$$

   <u>Caso 2: $-5 < x \leq \frac{-1}{2}$</u>

En este caso $2x+1 \leq 0$ y $x+5 > 0$, por lo tanto $|2x+1| = -2x-1$ y $|x+5| = x+5$. Entonces en este caso (1) se expresa como:

$$-2x - 1 - (x+5) > 0$$
$$-3x - 6 > 0$$
$$-3x > 6$$
$$x < -2$$

En este caso los valores de x que satisfacen la inecuación, son todos aquellos que están en

$$S_2 = (-5, -2)$$

$$\boxed{\text{0,8 puntos}}$$

<u>Caso 3: $x > \frac{-1}{2}$</u>

En este caso $2x+1 > 0$ y $x+5 > 0$, por lo tanto $|2x+1| = 2x+1$ y $|x+5| = x+5$. Entonces en este caso (1) se expresa como:

$$2x + 1 - (x+5) > 0$$
$$x - 4 > 0$$
$$x > 4$$

En este caso los valores de x que satisfacen la inecuación, son todos aquellos que están en

$$S_3 = (4, \infty)$$

$$\boxed{\text{0,8 puntos}}$$

Entonces todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la inecuación, son todos aquellos que están en:

$$S = S_1 = (-\infty, -5] \cup (-5, -2) \cup (4, \infty) = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

$\boxed{\text{0,6 puntos}}$

b) Encuentre una cota inferior del siguiente conjunto. Justifique su afirmación.

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{2n + 3} / \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

<u>Solución:</u>

Como $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \geq 1$, entonces $2n + 3$ es positivo.
Además como $n \geq 1$, entonces $n - 1 \geq 0$ y $n + (-1)^n \geq n - 1 \geq 0$.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Por lo tanto, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{n + (-1)^n}{2n + 3} \geq 0$$

Luego 0 es cota inferior de A.

$\boxed{\text{1 punto}}$

c) Encuentre una cota superior del siguiente conjunto. Justifique su afirmación.

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{2n + 3} / \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

<u>Solución:</u>

Como $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto positivo, se tiene que $n + 2$ es postivo, por lo tanto

$$n + (-1)^n \leq n + 1 < n + 1 + (n + 2) = 2n + 3$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

es decir,

$$n + (-1)^n < 2n + 3$$

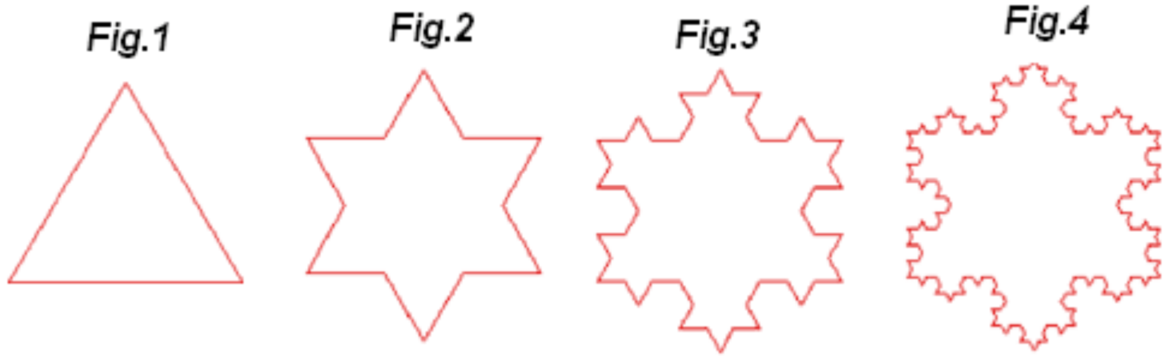
Por lo tanto

$$\frac{n + (-1)^n}{2n + 3} < 1$$

Luego 1 es cota superior de A.

$\boxed{\text{1 punto}}$

2. Cada lado de un triángulo equilátero de lado 1, se divide en tres partes iguales, en la parte central de cada lado se construye otro triángulo equilatero de lado $\frac{1}{3}$ y la base es borrada, en el siguiente paso cada trazo de largo $\frac{1}{3}$ se divide en tres partes iguales y se forma un triángulo equilátero y borramos la base y así sucesivamente.



a) ¿Cuánto mide cada lado de la figura 15?

Solución:

La medida del lado de la figura 15 mide:

$$L_{15} = \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

$$\boxed{\text{2,8 puntos}}$$

Pues como la medida del lado de la figura de un paso, es $\frac{1}{3}$ de la medida del paso anterior, salvo en el primer paso donde el lado mide 1. Entonces, si denotamos por L_k la medida de la figura k, entonces

$$L_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

De hecho si $k=1$

$$L_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

Si

$$L_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

entonces

$$L_{k+1} = \frac{1}{3}L_k = \frac{1}{3}L_k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$\boxed{\text{0,2 puntos}}$

b) ¿Cuántos lados tiene la figura 15?

<u>Solución:</u>

La cantidad de lados que tiene la figura 15 es:

$$C_{15} = 3 \times 4^{14}$$

$\boxed{\text{2,8 puntos}}$

Pues como la un lado del paso n se divide en cuatro lados de la figura del caso $n+1$. Di denotamos la cantidad de lados de la figura del paso k como C_k. Se tiene que $C_k = 4C_{k-1}$ y como $C_1 = 3$ se tiene que $C_k = 3 \times 4_{k-1}$.

De hecho si $k=1$

$$C_1 = 3 \times 4_0 = 3$$

Si

$$C_k = 3 \times 4_{k-1}$$

entonces

$$C_{k+1} = 4C_k = 4 \times 3 \times 4_{k-1} = 3 \times 4^k$$

$\boxed{\text{0,2 puntos}}$

3. Demuestra que
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

<u>Solución:</u>

Para $n = 1$ se tiene que $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ y por otra parte $\frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$, por lo tanto si $n = 1$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\boxed{0{,}5 \text{ puntos}}$$

Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\boxed{0{,}5 \text{ puntos}}$$

y consideremos la suma

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n+1} k^3 =$$

$$\boxed{1 \text{ puntos}}$$

$$(n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} =$$

$$\boxed{1 \text{ puntos}}$$

$$(n+1)^2\left[(n+1)+\frac{n^2}{4}\right]=$$

$\boxed{\text{1 puntos}}$

$$(n+1)^2\left[\frac{4n+4+n^2}{2}\right]=(n+1)^2\left[\frac{(n+2)^2}{2}\right]=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

Por lo tanto hemos demostrado por inducción que para cualquier valro de n se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\boxed{\text{o,5 puntos}}$

4. La tía del jardn infantil debe hacer ingresar a sus *estudiantes* en fila al escenario. En el nivel en que ella está a cargo hay 3 niños y 4 niñas, y por razones de disciplina no puede entrar un niño detrás de otro niño. ¿De cuántas formas distintas pueden entrar al escenario?

Solución:

Denotemos por N_i a alguno de los tres niños. Entonces, las posibles configuraciones necesitan poner niñas en los recuadros marcados con X_1, X_2, X_3 y X_4.

$$\boxed{X_1} \quad N_i \quad \boxed{X_2} \quad N_j \quad \boxed{X_3} \quad N_k \quad \boxed{X_4}$$

Si llamamos x_i la cantidad de niñas en X_i, entonces $x_2 \geq 1 \leq x_3$ y

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

Usaré la notación (x_1, x_2, x_3, x_4) para indicar los valores de los x_i. Entonces las posibles configuraciones se obtienen con:

- $(1, 1, 1, 1)$
- $(0, 1, 1, 2)$, $(0, 1, 2, 1)$, $(0, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 2, 0)$, $(1, 2, 1, 0)$
- $(0, 3, 1, 0)$, $(0, 1, 3, 0)$.
- $(0, 2, 2, 0)$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Además para cada configuaracón es necesario multiplicar por 4! que corresponde a las diferentes formas de ordenar las niñas y por 3! que son las maneras de ordenar los niños. Por lo tanto, las maneras distintas que pueden entrar al escenario son:

$$10 \times 3! \times 4!$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

$$= 1440$$