

# Cuarta Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2010

1. Si  $x > 0$ , ¿es cierto que  $x^{-1} > 0$ ?
2. ¿Es cierto que si  $x > 0$  entonces  $x + \frac{1}{x} > 2$ ? ¿Puede encontrar una relación similar para  $x < 0$ ?
3. Muestre que no existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x^2 + x + 1 = 0$ .
4. Muestre que si  $x > 0$  e  $y > 0$  entonces  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ . ¿En cuales casos se cumple la igualdad?
5. Sea  $A \in \mathbb{R}$ , muestre que el conjunto  $\{A - x^2 : x \in \mathbb{R}\}$  tiene un elemento que es el más grande de todos.
6. Considere un rectángulo de perímetro  $P$ . Muestre que los lados del rectángulo se pueden escribir en la forma  $\frac{P}{4} + a$  y  $\frac{P}{4} - a$ . Describa  $a$  en términos de los lados del rectángulo.
7. Muestre que entre los rectángulos de perímetro  $P$ , el cuadrado es el que tiene mayor área.
8. ¿Cuáles son los números reales que están a distancia menor que 2 del  $-3$ ?
9. ¿La ecuación  $x^2 + xy + y^2 = 0$  tiene solución nula?
10. Si  $x < y$ , ¿es cierto que  $x^2 < y^2$ ?

11. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $\{x_k : k \in \{1, \dots, n\}\}$  un conjunto de números reales. ¿Es cierto que

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|?$$

12. Sean  $x$  e  $y$  números reales. Considere el número

$$M(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Muestre que  $M(x, y)$  es el máximo entre  $x$  e  $y$ . Encuentre una expresión similar para el mínimo entre  $x$  e  $y$ .

13. (a) Si  $0 < r < 1$ , muestre que existe  $c > 0$  tal que  $r = \frac{1}{1+c}$ .
- (b) Muestre que si  $c > 0$  entonces  $(1 + c)^n \geq 1 + nc$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) Muestre que si  $0 < r < 1$ , existe  $c > 0$  tal que para cualquier valor de  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $r^n \leq \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{n}\right)$ .

14. Sean  $a, b, \delta$  y  $\epsilon$  números positivos. Suponga que  $|x - a| < \delta$  y que  $|y - b| < \epsilon$ . Demuestre que

(a)  $|x + y - (a + b)| < \delta + \epsilon$

(b)  $|xy - ab| < \delta(b + \epsilon) + a\epsilon$

(c)  $|x^2 - a^2| < \delta^2 + 2\delta a$

15. Resuelva las siguientes desigualdades.

(a)  $x < x^2 - 12 < 4x$

(b)  $\frac{x-1}{x^2-3x} \geq 0$

(c)  $|2x - 3| + |4 - x| < 2$