# Pauta Control 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Jueves 8 de Abril, 2010

**Tiempo :** 15 **minutos .**

**Nombre:**

**Elija solo un problema.**

1. Calcule

$$\sum_{k=50}^{100} \frac{1}{4k^2-1}$$

Solución:

Notemos que

$$\sum_{k=50}^{100} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{4k^2-1} - \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{4k^2-1}$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Observar que

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

Luego para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=50}^{100} \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{4k^2-1} - \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{4k^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 \cdot 100 + 1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 \cdot 49 + 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{201}\right) - \left(1 - \frac{1}{99}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{201}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

2. Sea $m \in \mathbb{N}$ y considere la suma

$$S = \sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2k-1)$$

(a) [2 puntos] Para $m = 5$ escriba los sumandos de $S$.

<u>Solución:</u>

Para $m = 5$ se tiene que

$$S = \sum_{k=11}^{15} (2k-1)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego los sumandos de $S$ son:

$$(2 \cdot 11 - 1), (2 \cdot 12 - 1), (2 \cdot 13 - 1), (2 \cdot 14 - 1), (2 \cdot 15 - 1)$$

Es decir

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=11}^{15} (2k-1) \\
&= (2 \cdot 11 - 1) + (2 \cdot 12 - 1) + (2 \cdot 13 - 1) + (2 \cdot 14 - 1) + (2 \cdot 15 - 1) \\
&= 21 + 23 + 25 + 27 + 29
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

(b) [4 puntos] Calcule el valor de $S$ para $m$ arbitrario.

<u>Solución:</u>

Notar que

$$S = \sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2k-1) = \sum_{k=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2k-1) - \sum_{k=1}^{\frac{m(m-1)}{2}} (2k-1)$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Como

$$\sum_{k=1}^{p} (2k-1) = p^2$$

para cualquier $p \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2k-1) - \sum_{k=1}^{\frac{m(m-1)}{2}} (2k-1) = \frac{m^2(m+1)^2}{4} - \frac{m^2(m-1)^2}{4}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por tanto

$$S = \sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2k-1) = \frac{m^2(m+1)^2}{4} - \frac{m^2(m-1)^2}{4} = \frac{m^2}{4}((m+1)^2-(m-1)^2)$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Entonces

$$S = \sum_{k=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2k-1) = m^3$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$