Pauta Control 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 29 de Marzo, 2010

1. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 5^n$ es divisible por 3.

   Solución:

   Para $n = 1$ se tiene que $8^1 - 5^1 = 8 - 5 = 3 = 3 \cdot 1$, por tanto 1 cumple la proposición.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Supongamos valido para n, es decir, $8^n - 5^n$ es divisible por 3 y probemos para $n+1$, esto es $8^{n+1} - 5^{n+1}$ es divisible por 3.

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Notamos que

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 5^{n+1} &= 8 \cdot 8^n - 5 \cdot 5^n \\ &= (1+7)8^n - (1+4)5^n \\ &= 8^n + 7 \cdot 8^n - 5^n - 4 \cdot 5^n \\ &= 8^n - 5^n + 7 \cdot 8^n - 4 \cdot 5^n \\ &\overset{H.I.}{=} 3k + (1+6)8^n - (1+3)5^n \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

$$\begin{aligned} &= 3k + 8^n + 6 \cdot 8^n - 5^n - 3 \cdot 5^n \\ &= 3k + 8^n - 5^n + 3(2 \cdot 8^n - 5^n) \\ &\overset{H.I.}{=} 3k + 3k + 3(2 \cdot 8^n - 5^n) \\ &= 3(2k + 2 \cdot 8^n - 5^n) \\ &= 3k' \end{aligned}$$

   donde $k' = 2k + 2 \cdot 8^n - 5^n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto si n cumple la proposición entonces $n+1$ también la cumple. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 5^n$ es divisible por 3.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 5 + 9 + \ldots + 4n - 3 = n(2n - 1)$.

<u>Solución:</u>

Para $n = 1$ se tiene que $1 = 1(2 \cdot 1 - 1)$, por tanto 1 cumple la proposición.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Supongamos valido para n, es decir, $1+5+9+\ldots+4n-3 = n(2n-1)$ y probemos para $n+1$, esto es $1+5+9+\ldots+4(n+1)-3 = (n+1)(2(n+1)-1)$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Notamos que

$$\begin{aligned} 1+5+9+\ldots+4(n+1)-3 &= 1+5+9+\ldots+4n-3+4(n+1)-3 \\ &= (1+5+9+\ldots+4n-3)+4(n+1)-3 \\ &\overset{H.I.}{=} n(2n-1)+4(n+1)-3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$$\begin{aligned} &= 2n^2 - n + 4n + 4 - 3 \\ &= 2n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)(2n+1) \\ &= (n+1)(2n+2-1) \\ &= (n+1)(2(n+1)-1) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto si n cumple la proposición entonces $n+1$ también la cumple. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$, $1+5+9+\ldots+4n-3 = n(2n-1)$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$