Segunda Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2010

1. Demuestre usando inducción que

   (a) $2+5+8+\cdots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

   (b) $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

   (c) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

   (d) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{4^n}=\dfrac{1}{5}\left[1-\dfrac{1}{(-4)^n}\right]$

   (e) Los números de la forma $3^{2n}-1$ son divisibles por 8

   (f) Los números de la forma $2^{2n+1}-9\,n^2+3\,n-2$ son divisibles por 54

   (g) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}\ \leq\ \dfrac{5}{6}$

   (h) $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\, n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\ <\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

2. Conjeture fórmulas para las siguientes expresiones y luego demuéstrelas usando inducción.

   (a) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})$

   (b) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

3. Pruebe que $n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+p-1)$ es divisible por p, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

4. Determine si cada una de las siguientes sumas son verdaderas ofalsas.

   (a) $\sum_{n=0}^{100}(n+1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$

   (b) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = (\sum_{k=1}^{100} k^2)(\sum_{k=1}^{100} k)$

   (c) $\sum_{k=0}^{100}(2+k) = 2 + \sum_{k=1}^{100} k$

   (d) $\sum_{k=0}^{100} 2 = 200$

5. Calcule las siguientes sumas.

   (a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+2)^2}$

   (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k^2+5k+6}$

   (d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$

6. Demuestre las siguientes igualdades usando las propiedades de las sumatorias.

   (a) $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}[1-(n+1)r^n + nr^{n+1}], r \neq 1$

   (c) $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}k^2 = (n+1)(2n+1)$

   (d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{1+k^2+k^4} = 1 - \frac{1}{1+n+n^2}$

7. Calcule el valor de las siguientes sumas.

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} 7^i$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} 7^k$

   (c) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} 7^n$

   (d) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{n} (k + 2i)$

   (e) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{2^j}{3^k}\right)$

   (f) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{7} (2i^2k - 20)$

8. Si a_n es la sucesión de Fibonacci, definida por $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ entonces

   (a) $a_{n+1} \cdot a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$

   (b) a_n y a_{n+1} son primos relativos.

   (c) $a_n < \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$