Tercera guía de ejercicios

Inducción y sumatorias

1. Pruebe por inducción para todo entero positivo n:

   a) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   b) $5n^3+7n$ es divisible por 6

   c) n^3+2n es divisible por 3

   d) $576 \mid (5^{2(n+1)}-24n-25)$

   e) $2^n > n$

   f) $24 \mid (n(n^2-1))$ cuando n es impar

   g) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n+1)} \leq \frac{5}{6}$

   h) $8 \mid (3^{2n}-1)$

2. Calcule y simplifique

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{6}{12^i}+\frac{83}{(2i-1)(2i+1)}\right)$$

3. Calcule y demuestre por Inducción:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-1)=\frac{n(3n+1)}{2}$

   b) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdot+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

   d) $2\cdot 5+5\cdot 8+\cdots+(3n-1)(3n+2)=3n^3+6n^2+n$

   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k(k+1)2^k}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$

4. Calcule:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3+i^2+1}{i(i+1)}$

   b) $3+4\cdot 4+9\cdot 5+16\cdot 6+\cdots$ hasta n términos

   c) $\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots$ hasta n términos

5. Calcule la siguiente sumatoria usando la propiedad telescópica:

$$\sum_{n=1}^{k} n!n$$

`(Sugerencia: considere` $a_n = n!$`)`

6. Calcule
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}(i+3)\right)$$

7. Calcule y simplifique
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(2j+3)$$

Progresiones aritméticas y geométricas

1. Determine a_{40} y la suma de los primeros 40 términos de la P.A. con primeros términos 55, 47, 39,...

2. ¿Qué posición ocupa en la P.A. el número 239 si los tres primeros son 5, 14, 23?

3. ¿Cuantos enteros consecutivos partiendo de 9 se deben sumar para que el resultado de 2035?

4. Encuentre tres números que estén en P.A. si la suma del primero con el tercero de ellos es 12, y si el producto del primero con el segundo de ellos es 27.

5. Un objeto avanza desde el reposo y durante el primer segundo recorre 16 cm, durante el segundo siguiente recorre 48 cm, durante el tercer segundo recorre 80 **cm**, y así en adelante. Calcule la distancia total recorrida en 15 segundos desde que empezó a moverse.

6. Si a, b y c están en P.A., demuestre que la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$ tiene a -1 como raíz.

7. Determine el séptimo término, y la suma de los primeros 7 términos de la P.G. cuyos primeros términos son 9, -6, 4...

8. El primer término de una P.G. es 160 y la razón de la P.G. es $2/3$. Determine cántos términos se deben sumar para obtener 2110.

9. Determine tres números a, b y c que estén en P.G., que además a, $b+8$ y c formen una P.A. y que además a, $b+8$ y $c+64$ estén en P.G.

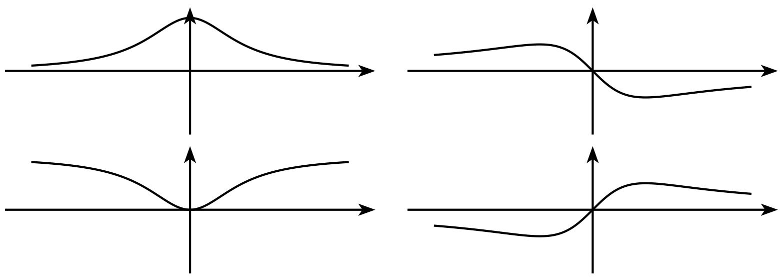
10. Determine una P.A. tal que su primer término es 1, y que sus términos segundo, décimo y trigésimo cuarto estén en P.G.

11. Si en una P.A. la suma de los primeros m términos es n, y la suma de los primeros n términos es m, calcule la suma de los primeros $n+m$ términos.

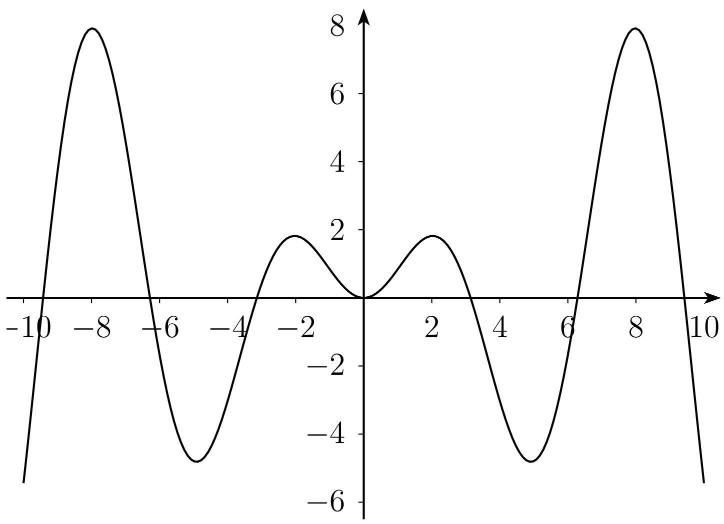
Funciones

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = |x|$. Describa $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$

2. Uno de los siguientes gráficos es el gráfico de la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.¿Cuál es? Explique por qué.



3. Suponga que la siguiente curva es el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



   a) Diga, aproximadamente, para qué valores de x, se tiene $f(x) = 0$.

   b) Diga, aproximadamente, en cuuáles intervalos se tiene que $f(x) > 0$.

   c) Diga, aproximadamente, en cuáles intervalos se tiene que $f(x) < 0$.

   d) ¿Es cierto que $f(x) = f(-x)$?

   e) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + 5$.

   f) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$.

   g) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(-x)$.

   h) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |f(x)|$.

4. Grafique la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 2| + |2 - 2x|$.