Segunda guía de ejercicios

1. Sumatorias

1. Calcule la suma de los primeros 100 números impares.

2. Calcule la suma de los números pares entre 150 y 300 (incluyendo ambos).

3. Demuestre que la suma de los primeros n cubos es un cuadrado.

4. Calcule las siguientes sumas:

   a) $\sum_{n=1}^{5} n^2 - n$

   b) $\sum_{n=3}^{8} \frac{1}{n}$

   c) $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{2^n}$

   d) $\sum_{k=5}^{n} 7^k$

   e) $\sum_{n=3}^{101} \frac{1}{n^2-1}$

   f) $\sum_{k=4}^{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

5. Se construye un triángulo utilizando números impares consecutivos como se muestra a continuación

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3\ \ 5 \\ 7\ \ 9\ \ 11 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

   Utilice el símbolo de sumatoria para expresar la suma de todos los elementos de la n-ésima fila. Calcule dicha suma.

6. Demuestra que la siguiente proposición es cierta:

   Si se escogen tres números de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *y luego se suman todos los números posibles de tres cifras distintas que se pueden formar con esos tres números fijos, entonces se obtiene un número divisible por 222.*

7. Utilice el símbolo de sumatoria para escribir la siguiente suma, hasta el término n -ésimo y calcule el valor de la suma.

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 4) + (1 + 2 + 4 + 8) + (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + ...+? =$$

8. Don Ramón tiene que regar 50 árboles que están dispuestos en una hilera con una separación de 6 metros entre árboles sucesivos. Don Ramón regará los árboles con un balde que llenará en una llave a 10 metros del primer árbol (Cada árbol recibirá un balde de agua). ¿Cuánto deberá caminar Don Ramón para regar todos los árboles?

9. El abuelo de Carlos le ofrece: *Mira Carlitos, hoy te daré 500 bolitas, mañana 1000 bolitas, pasado mañana 1500 bolitas y así sucesivamente cada día 500 bolitas más que el día anterior por dos años, o bien si tu prefieres te daré una bolita hoy, dos mañana, cuatro pasado mañana y así sucesivamente cada día el doble de bolitas que el día anterior por un mes.* Si tu fueses Carlitos, ¿Cuál de las opciones tomarías?

10. Si la persona del problema anterior desea tener 50 millones en su cuenta al cabo de los 30 años y la tasa de interés se mantiene en 3 %, ¿cuánto debe ahorrar mensualmente?.

11. Si depositamos un millón de pesos anuales en una cuenta de ahorro con tasa de interés fija y nos dicen que al cabo de 30 años tendremos 50 millones de pesos, ¿cuál es la tasa de interés que nos están ofreciendo?

12. En un cierto banco ofrecen un crédito hipotecario de 50 millones a 20 años con una tasa fija en pesos de 7 % anual. Sin considerar otros costos asociados (seguros, comisiones, etc) ¿Cuánto será la cuota mensual del crédito? ¿Qué porcentaje corresponde a pago de intereses durante el primer mes?

2. Funciones

1. Esboce gráficos para las funciones siguientes:

   a) $f(x) = 3x + 1, \quad -2 \leq x \leq 8$

   b) $f(x) = x/3 - 1, \quad 3 \leq x \leq 8$

   c) $f(x) = -2x + 1, \quad 0 \leq x \leq 8$

   d) $f(x) = x^2 + 1, \quad -2 \leq x \leq 2$

   e) $f(x) = (x-1)^2-1, \quad 0 \leq x \leq 5$

   f) $f(x) = |x + 1|, \quad -2 \leq x \leq 8$

   g) $f(x) = |2x - 1|, \quad 3 \leq x \leq 8$

   h) $f(x) = |-x+1|+1, \quad 0 \leq x \leq 8$

   i) $f(x) = |(x - 1)^2 - 1|, \quad 0 \leq x \leq 5$

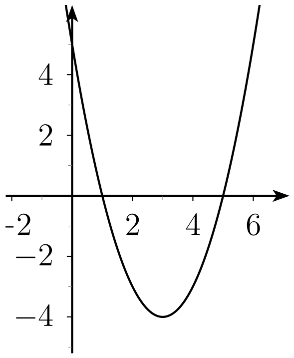
2. Explique con sus palabras las diferencias entre una función y una fórmula.

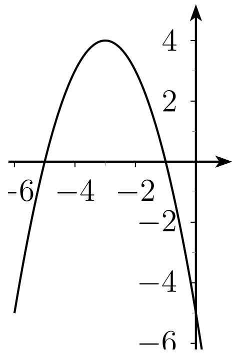
3. ¿Es la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$, una función constante? Grafíquela.

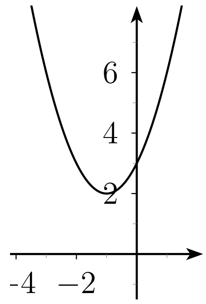
4. Una taxista cobra \$200 por los primeros 200 m de recorrido. Por cada \$200 que recorre despué de los 200 m iniciales, la cuenta aumenta en \$80. Describa la cuenta $C(x)$, para cada distancia recorrida x. Esboce un gráfico que represente el cobro. Obtega una fórmula explícita usando la función parte entere.

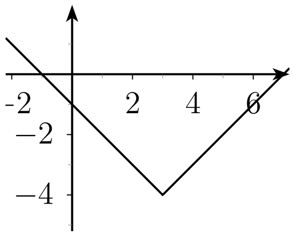
5. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x^2 + 1)^3$. ¿Puede escribir f como la composición de tres funciones?¿Cuáles son? ¿Podría encontrar otras tres para hacer lo mismo?

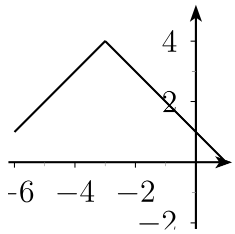
6. Encuentre fórmulas para las funciones cuyos gráficos se esbozan a continuación (suponga que los gráficos a, b y c representan funciones cuadráticas):

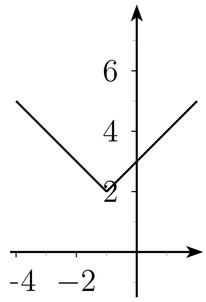
a) 

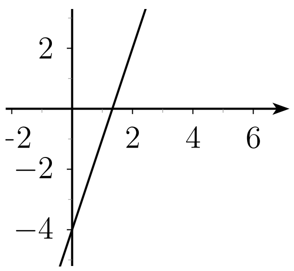
b) 

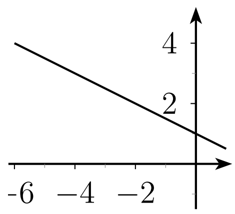
c) 

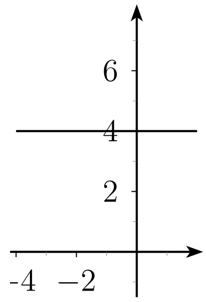
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

   a) Evalúe $f(-3)$, $f(x^2)$, $f(x+1)$, $f(-x)$.

   b) Para que valores de x, $f(x) > 0$.

   c) Escriba $f(x) = (x+c)^2 + d$ para ciertos $c, d \in \mathbb{R}$.

   d) Grafique f.

   e) Grafique $|f|$.

   f) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

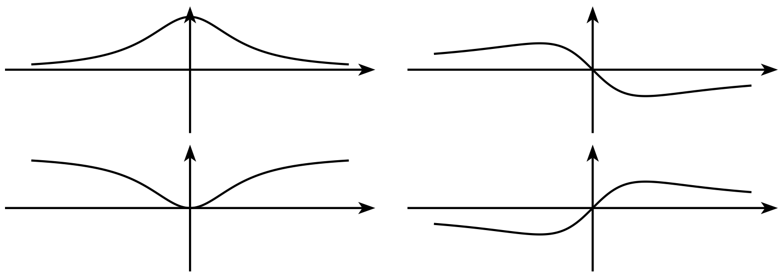
$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x-5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   Describa $f \circ g$ y $g \circ f$. Grafique ambas funciones y también g.

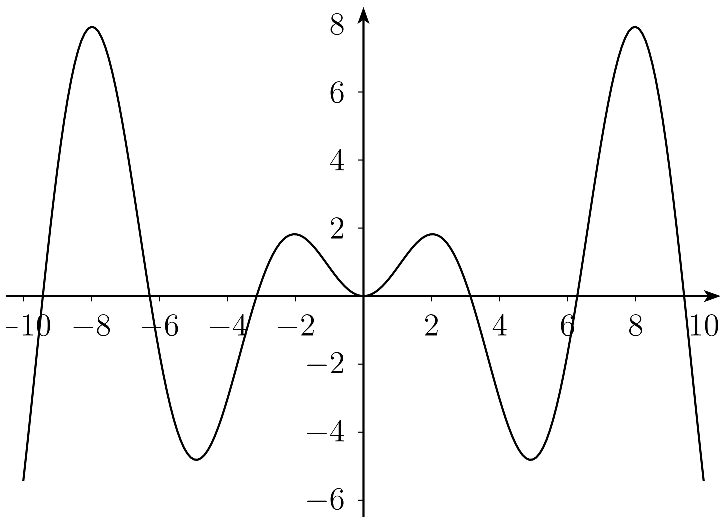
8. ¿Puede ser el círculo de radio 1 y centro en el origen el gráfico de una función?

9. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$,
$g(x) = |x|$. Describa $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$

10. Uno de los siguientes gráficos es el gráfico de la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.¿Cuál es? Explique por qué.



11. Suponga que la siguiente curva es el gráfico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



a) Diga, aproximadamente, para qué valores de x, se tiene $f(x) = 0$.

b) Diga, aproximadamente, en cuuáles intervalos se tiene que $f(x) > 0$.

c) Diga, aproximadamente, en cuáles intervalos se tiene que $f(x) < 0$.

d) ¿Es cierto que $f(x) = f(-x)$?

e) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + 5$.

f) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$.

g) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(-x)$.

h) Esboce un gráfico de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |f(x)|$.

12. Grafique la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 2| + |2 - 2x|$.