Ayudante Ignacio Trujillo

Auxiliar de números complejos

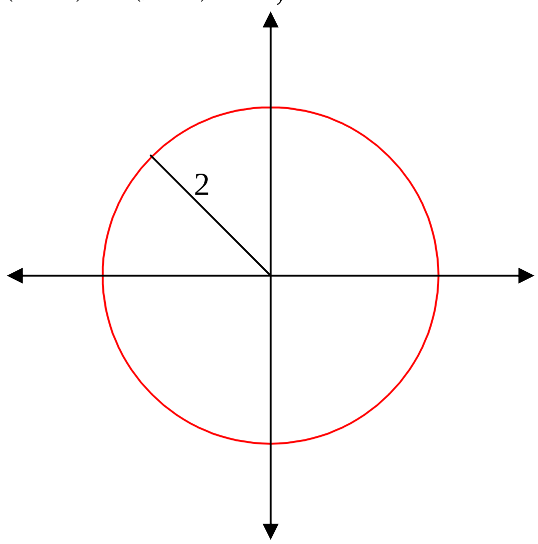
1. Describa con un dibujo los siguientes conjuntos.

a) $C = \{z \in C / |z - 2 + i| = 2\}$

$$C = \{z \in C / |z - 2 + i| = 2\}$$
$$C = \{x, y \in \Re / |x + yi - 2 + i| = 2\}$$
$$C = \{x, y \in \Re / |(x - 2) + i(y + 1)| = 2\}$$

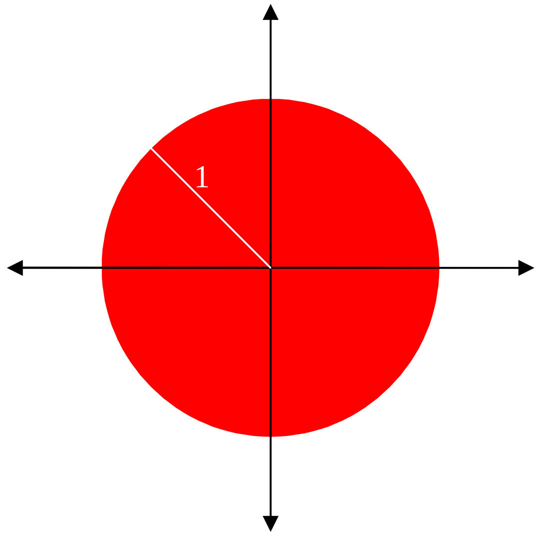
Luego, ocupando $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$C = \{x, y \in \Re / |(x - 2) + i(y + 1)| = 2\}$$
$$C = \{x, y \in \Re / (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4\}$$



b) $D = \{z \in C / 0 < |z| \leq 1\}$

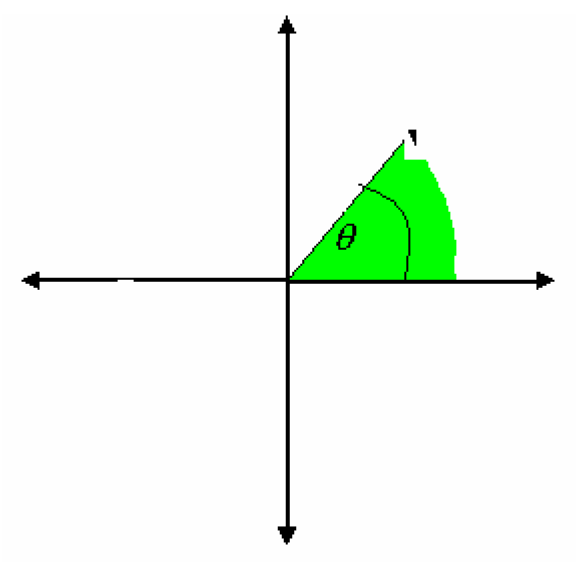
$$C = \{z \in C / 0 < |z| \leq 1\}$$
$$C = \{x, y \in \Re / 0 < |x + yi| \leq 1\}$$
$$C = \left\{x, y \in \Re / 0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$$



c) $A = \left\{ z \in C / 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$

Una manera de definir un complejo es diciendo que es igual a $z = |z|(\cos(\theta) + isen(\theta))$.
Luego $Arg(z) = \theta$.

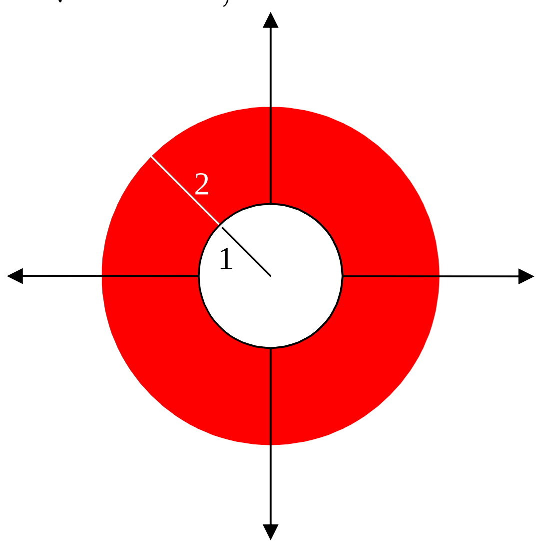
Con esto podemos decir que



Ayudante Ignacio Trujillo

d) $A = \{z \in C / 1 < |z| < 2\}$

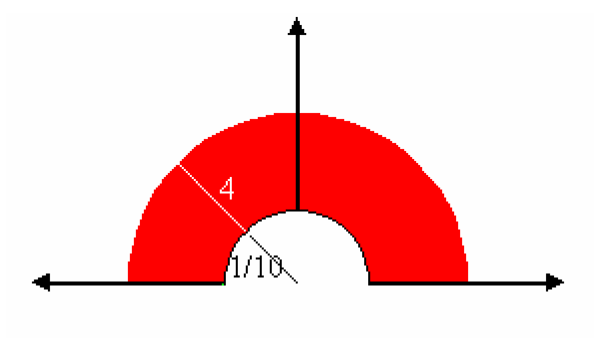
$$C = \{z \in C / 1 < |z| < 2\}$$
$$C = \{x, y \in \Re / 1 < |x + yi| < 2\}$$
$$C = \{x, y \in \Re / 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$$



e) $T = \left\{z \in C / \frac{1}{10} < |z| < 4, \operatorname{Im}(z) \geq 0\right\}$

Si $z = x + iy$, tenemos entonces que la parte imaginaria de z es $\operatorname{Im}(z) = y$.

$$T = \left\{x, y \in \Re / \frac{1}{10} < \sqrt{x^2 + y^2} < 4, y \geq 0\right\}$$

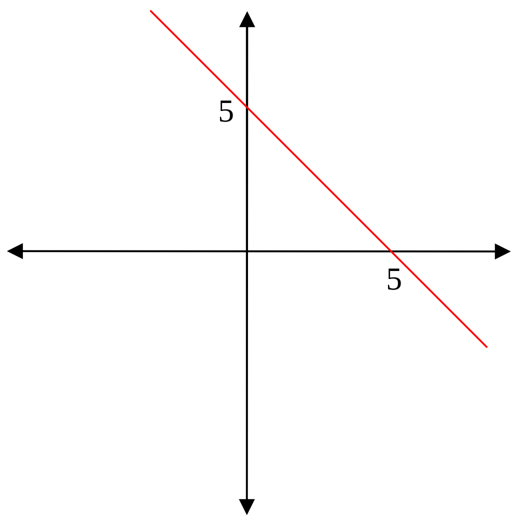


Ayudante Ignacio Trujillo

f) $L = \{z \in C / \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 5\}$

Si $z = x + iy$, tenemos entonces que la parte real de z es $\mathrm{Re}(z) = x$ y la imaginaria de z es $\mathrm{Im}(z) = y$.

$L = \{x, y \in \Re / x + y = 5\}$



Sigan ustedes.

2. Calcule:

<u>Algunas propiedades</u>:

$\cos(2n\pi) = 1, \forall n \in Z. \Rightarrow sen(2n\pi) = 0 \ \forall n \in Z$

$\cos((2n-1)\pi) = -1, \forall n \in Z. \Rightarrow sen((2n-1)\pi) = 0, \forall n \in Z$

$sen\left((4n-3)\frac{\pi}{2}\right) = 1, \forall n \in Z. \Rightarrow \cos\left((4n-3)\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \forall n \in Z$

$sen\left((4n-1)\frac{\pi}{2}\right) = -1, \forall n \in Z. \Rightarrow \cos\left((4n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0, \forall n \in Z$

Estas propiedades son fácilmente demostrables al hacer un pequeño análisis al circulo de radio uno centrado en cero coma cero.

a) i^{1003}

$$i^{1003} = \underbrace{i^2 \cdot i^2 \cdot \cdots \cdot i^2}_{501} \cdot i$$
$$i^{1003} = (-1)^{501} \cdot i$$
$$i^{1003} = -i$$

b) $(-i)^{1003}$

$(-i)^{1003} = (-1)^{1003} \cdot i^{1003}$ Luego, usando parte a).

$$(-i)^{1003} = (-1) \cdot (-i)$$
$$(-i)^{1003} = i$$

c) $(-1+i)^{1004}$

Usaremos que $z^n = (x+iy)^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta))$, con $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Luego, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $n = 1004$; $x = -1$; $y = 1$.

Con estos datos tenemos:

$$z^{1004} = (-1+i)^{1004} = \left(\sqrt{2}\right)^{1004} (\cos(1004\theta) + i \cdot sen(1004\theta)), \text{ pero nos falta } \theta. \qquad (1)$$

Ese θ va a ser el mismo para todo n, ocupando esto elegimos $n = 1$ para determinar el θ.

$$z = (-1+i) = \sqrt{2}(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$$
$$z = -1 + i = \sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{2} \cdot i \cdot sen(\theta) \qquad (2)$$

A continuación, tomamos la parte real de la ecuación anterior (2) (lo que significa dejar todo lo que <u>no</u> está multiplicado por *i)*.

$$\operatorname{Re}(-1+i) = \operatorname{Re}\left(\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{2} \cdot i \cdot sen(\theta)\right)$$

$$-1 = \sqrt{2}\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Finalmente tomamos la parte imaginaria de la ecuación (2) (se debe dejar todo lo que está multiplicado por *i*).

$$\mathrm{Im}(-1+i) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{2}\cdot i\cdot sen(\theta)\right)$$

$$1 = \sqrt{2}sen(\theta) \Rightarrow sen(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Podemos ocupar cualquiera de los dos resultados, por su simplicidad ocuparemos $\theta = \frac{\pi}{4}$, retomamos (1).

$$z^{1004} = (-1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^{1004}\left(\cos\left(1004\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot sen\left(1004\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^{1004} = (-1+i)^{1004} = 2^{502}\left(\cos(251\pi) + i\cdot sen(251\pi)\right)$$

Usando propiedades enunciadas al principio del punto 2), tenemos que $\cos(251\pi) = -1$ y que $sen(251\pi) = 0$ 3

$$z^{1004} = (-1+i)^{1004} = 2^{502}(-1+i\cdot 0)$$

$$z^{1004} = (-1+i)^{1004} = -2^{502}$$

d) $\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^{600}$

Al igual que el ejercicio anterior usaremos que $z^n = (x+iy)^n = |z|^n\left(\cos(n\theta) + i\cdot sen(n\theta)\right)$, con $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Luego, $|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2;\ n = 600;\ x = 1;\ \ y = \sqrt{3}.$

Con estos datos tenemos:

$z^{600} = \left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^{600} = 2^{600}\left(\cos(600\theta) + i\cdot sen(600\theta)\right)$, pero nos falta θ. (3)

Ese θ va a ser el mismo para todo n, ocupando esto elegimos $n = 1$ para determinar el θ.

$$z = \left(1+\sqrt{3}\cdot i\right) = 2\left(\cos(\theta) + i\cdot sen(\theta)\right)$$

$$z = 1 + \sqrt{3} \cdot i = 2\cos(\theta) + 2 \cdot i \cdot sen(\theta) \qquad (4)$$

A continuación, tomamos la parte real de la ecuación anterior (4) (lo que significa dejar todo lo que <u>no</u> está multiplicado por *i)*.

$$\mathrm{Re}\left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right) = \mathrm{Re}\left(2\cos(\theta) + 2 \cdot i \cdot sen(\theta)\right)$$

$$1 = 2\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^{o} = \frac{\pi}{3}$$

Finalmente tomamos la parte imaginaria de la ecuación (4) (se debe dejar todo lo que está multiplicado por *i*).

$$\mathrm{Im}\left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right) = \mathrm{Im}\left(2 \cdot \cos(\theta) + 2 \cdot i \cdot sen(\theta)\right)$$

$$\sqrt{3} = 2sen(\theta) \Rightarrow sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Podemos ocupar cualquiera de los dos resultados (que en este caso es el mismo), por su simplicidad ocuparemos $\theta = \frac{\pi}{3}$, retomamos (3).

$$z^{600} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{600} = 2^{600}\left(\cos\left(600 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\cdot \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z^{1004} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{600} = 2^{600}\left(\cos\left(200\pi\right) + i \cdot sen\left(200\pi\right)\right)$$

Usando propiedades enunciadas al principio del punto 2), tenemos que $\cos\left(200\pi\right) = 1$ y que $sen\left(200\pi\right) = 0$

$$z^{600} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{600} = 2^{600}\left(1 + i \cdot 0\right)$$

$$z^{600} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{600} = 2^{600}$$

Ayudante Ignacio Trujillo

METODOLOGIA (*Elevar un numero complejo a la n*)

Datos conocidos:

1. El numero complejo $z = x + i \cdot y$
2. El *n* al cual se te esta pidiendo elevar. $z^n = (x + i \cdot y)^n$

Procedimiento:

1. Obtener el $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Reemplazar el $|z|$ y el *n* en la siguiente formula.
   $z^n = (x + iy)^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta))$
3. Debemos encontrar el θ para poder obtener valores para cos () y sen ().

Como se obtienen θ equivalentes para todo *n*, entonces tomamos $n = 1$ para obtener el θ.

Luego, tenemos la siguiente ecuación $z = (x + iy) = |z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$

a) Tomamos la parte real (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que <u>no</u> está multiplicado por *i*.)

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + iy) = \mathrm{Re}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\mathrm{Re}(z) = x = |z|\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$$

$$\theta = \arg\cos\left(\frac{x}{|z|}\right)$$

b) El mismo procedimiento anterior se puede hacer tomando la parte imaginaria (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que está multiplicado por *i*.)

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x + iy) = \mathrm{Im}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\mathrm{Im}(z) = y = |z| sen(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

$$\theta = \arg sen\left(\frac{y}{|z|}\right)$$

4. Una vez que tenemos el θ lo reemplazamos en la ecuación del punto 2.

$$z^n = (x+iy)^n = |z|^n \left(\cos\left(n \cdot \arg\cos\left(\frac{x}{|z|} \right) \right) + i \cdot sen\left(n \cdot \arg\cos\left(\frac{x}{|z|} \right) \right) \right)$$ o alternativamente

$$z^n = (x+iy)^n = |z|^n \left(\cos\left(n \cdot \arg sen\left(\frac{y}{|z|} \right) \right) + i \cdot sen\left(n \cdot \arg sen\left(\frac{y}{|z|} \right) \right) \right)$$

5. Seguramente los cósenos y los senos se resolverán fácilmente (para términos de este curso).

Ayudante Ignacio Trujillo

3. Calcule:

METODOLOGIA (*Obtener las raíces n-esimas de un complejo*)

Es importante destacar que si se pide obtener la raíz n-esima de un determinado complejo, se deben obtener n raíces (en el caso de los números reales se obtiene un numero menor o igual a n) .

Datos conocidos:

1. El numero complejo $z = x + y \cdot i = |z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$
2. El numero n, numero de raíces. $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(x + i \cdot y)}$
3. A partir de 1. se obtiene x, y, θ

Procedimiento:

1. Obtener el $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Reemplazar el $|z|$ y el *n* en la siguiente formula. $w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\phi_k) + i \cdot sen(\phi_k))$
3. Debemos encontrar los n ϕ_k que son iguales a $\phi_k = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ con $k = 0,1,\ldots, n-1$

   de ϕ_k tenemos el $n,.k$, por lo que nos falta encontrar θ que es constante para todo ϕ_k .
4. Como el θ es constante, entonces tomamos la raíz *n*-esima con $n = 1$ lo cual implica que $k = 0$, ya que $k = 0,1,\ldots, n-1$

Luego, tenemos la siguiente ecuación $z = (x + iy) = |z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$

c) Tomamos la parte real (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que <u>no</u> está multiplicado por *i*.)

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\operatorname{Re}(z) = x = |z|\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$$

$$\theta = \arg\cos\left(\frac{x}{|z|}\right)$$

d) El mismo procedimiento anterior se puede hacer tomando la parte imaginaria (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que está multiplicado por *i*.)

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x+iy) = \operatorname{Im}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\operatorname{Im}(z) = y = |z| sen(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

$$\theta = \arg sen\left(\frac{y}{|z|}\right)$$

5. Una vez que tenemos el θ lo reemplazamos en la ecuación del punto 2.

$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(x+iy)} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\phi_k) + i \cdot sen(\phi_k))$, o alternativamente

$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(x+iy)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$, más explícitamente seria

$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(x+iy)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg\cos\left(\frac{x}{|z|}\right)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\arg\cos\left(\frac{x}{|z|}\right)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ con

$k = 0,1,\ldots,n-1$

También es valido

$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{(x+iy)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg sen\left(\frac{y}{|z|}\right)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\arg sen\left(\frac{y}{|z|}\right)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ con

$k = 0,1,\ldots,n-1$

6. El número e soluciones que se obtienen es igual a *n*.

7. Seguramente los cósenos y los senos se resolverán fácilmente (para términos de este curso).

Ayudante Ignacio Trujillo

a) Calcule la raíz 4 de -81.

Sigamos el procedimiento al pie de la letra.

<u>Datos conocidos:</u>

1. El numero complejo $z = -81 = 81 \cdot (\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$
2. $w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-81}$
3. A partir de 1. se obtiene x, y, θ

<u>Procedimiento</u>:

4. Obtener el $|z| = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = 81$.
5. Reemplazar el $|z| = 81$ y el $n=4$ en la siguiente formula.
   $w_k = \sqrt[4]{81}(\cos(\phi_k) + i \cdot sen(\phi_k))$ con $k = 0,1,\ldots,n-1$
6. Debemos encontrar los cinco ϕ_k que son iguales a $\phi_k = \dfrac{\theta}{4} + \dfrac{2k\pi}{4}$ con $k = 0,1,\ldots,n-1$, nos falta encontrar θ que es constante para todo ϕ_k.

7. Como el θ es constante para cualquier raíz n-esima, entonces tomamos la raíz con $n = 1$ lo cual implica que $k = 0$, ya que $k = 0,1,\ldots,n-1$

(En este procedimiento se encuentra el mismo θ de la definición de z, no se compliquen con lo que dice anteriormente)

Luego, tenemos la siguiente ecuación:

$$z = -81 = 81 \cdot (\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$$

e) Tomamos la parte real (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que <u>no</u> está multiplicado por *i*.)

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\operatorname{Re}(z) = -81 = 81\cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = -1$$
$$\theta = \arg\cos(-1) \Rightarrow \theta = \pi$$

f) El mismo procedimiento anterior se puede hacer tomando la parte imaginaria (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que está multiplicado por *i*.)

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x + iy) = \operatorname{Im}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\operatorname{Im}(z) = 0 = 81 sen(\theta)$$
$$sen(\theta) = 0$$
$$\theta = \arg sen(0) \Rightarrow \theta = 0 \text{ con } n = Z$$

8. Una vez que tenemos el $\theta = \pi$ lo reemplazamos en la ecuación del punto 2.

$w_k = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81}\left(\cos(\phi_k) + i \cdot sen(\phi_k)\right)$, o alternativamente

$w_k = \sqrt[4]{-81} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right)$, con $k = 0,1,\ldots,n-1$

Para *k = 0,*

$$w_0 = \sqrt[4]{-81} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para *k = 1,*

$$w_1 = \sqrt[4]{-81} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$w_1 = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para *k = 2,*

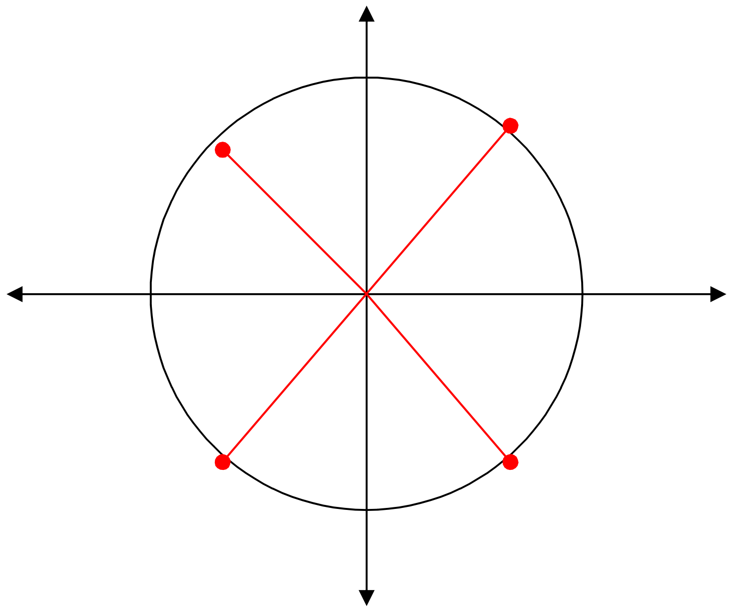
$$w_2 = \sqrt[4]{-81} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$
$$w_2 = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para *k = 3,*

$$w_3 = \sqrt[4]{-81} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$
$$w_3 = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

9. El número de soluciones que se obtienen es igual a *n*, en este caso igual a 4.

Ayudante Ignacio Trujillo



Pongan las raíces en el círculo de radio 3

b) $z = \sqrt{3} + i$ con $n = 3$

Sigamos el procedimiento al pie de la letra.

<u>Datos conocidos:</u>

1. El numero complejo $z = \sqrt{3} + i = |z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$
2. $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} + i)}$
3. A partir de 1. se obtiene x, y, θ

<u>Procedimiento</u>:

4. Obtener el $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.
5. Reemplazar el $|z| = 2$ y el *n=3* en la siguiente formula, luego tenemos $z = \sqrt{3} + i = 2(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$
6. A continuación, ocupamos $w_k = \sqrt[3]{2}(\cos(\phi_k) + i \cdot sen(\phi_k))$ con $k = 0,1,\ldots,n-1$
7. Debemos encontrar los cinco ϕ_k que son iguales a $\phi_k = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0,1,\ldots,n-1$, nos falta encontrar θ que es constante para todo ϕ_k .
8. Como el θ es constante para cualquier raíz n-esima, entonces tomamos la raíz con $n = 1$ lo cual implica que $k = 0$, ya que $k = 0,1,\ldots,n-1$

(En este procedimiento se encuentra el mismo θ de la definición de z , no se compliquen con lo que dice anteriormente)

Luego, tenemos la siguiente ecuación:

$$z = (\sqrt{3} + i) = 2 \cdot (\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$$

g) Tomamos la parte real (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que <u>no</u> está multiplicado por *i*.)

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + iy) = \mathrm{Re}(|z|(\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$
$$\mathrm{Re}(\sqrt{3} + i) = \mathrm{Re}(2 \cdot (\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)))$$

$$\mathrm{Re}(z) = \sqrt{3} = 2\cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \arg\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

h) El mismo procedimiento anterior se puede hacer tomando la parte imaginaria (lo que significa dejar a cada lado de la ecuación lo que está multiplicado por *i*.)

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x+iy) = \mathrm{Im}(|z|(\cos(\theta) + i\cdot sen(\theta)))$$

$$\mathrm{Im}\left(\sqrt{3}+i\right) = \mathrm{Im}(2\cdot(\cos(\theta)+i\cdot sen(\theta)))$$

$$\mathrm{Im}(z) = 1 = 2sen(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arg sen\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \theta = 30^{o} = \frac{\pi}{6}$$

9. Una vez que tenemos el $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ lo reemplazamos en la ecuación del punto 2.

$w_k = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+i\right)} = \sqrt[3]{2}(\cos(\phi_k) + i\cdot sen(\phi_k))$, o alternativamente

$w_k = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+i\right)} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\cdot sen\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, con $k = 0,1,\ldots,n-1$

Para *k = 0,*

$$w_0 = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+i\right)} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)$$

Para *k = 1,*

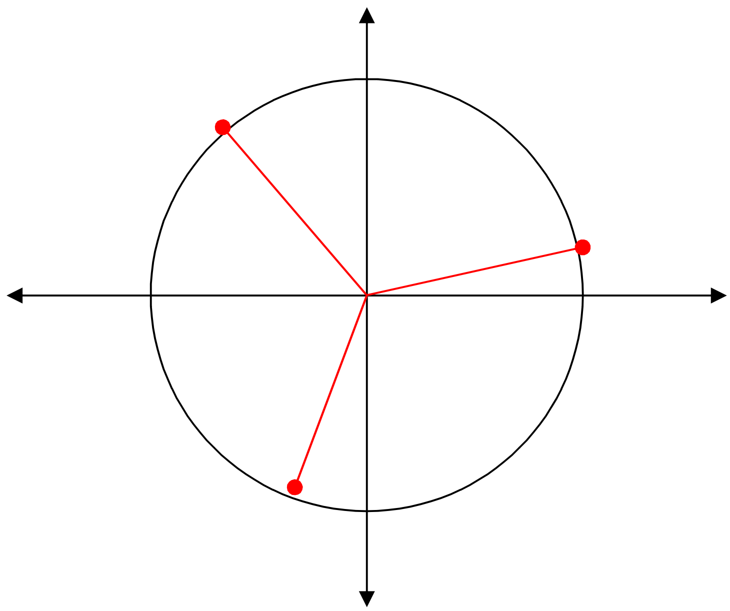
$$w_1 = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+i\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i\cdot sen\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right)$$

Para *k = 2,*

$$w_2 = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+i\right)} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) + i\cdot sen\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right)$$

10. El número de soluciones que se obtienen es igual a *n*, en este caso igual a 3.

Ayudante Ignacio Trujillo



Pongan las raíces en el círculo de radio 2