

Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Primavera, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Resuelva solo uno de los siguientes problemas

1. Considera la recta $L : y = 3$ y el punto $F = (1, 0)$ ¿Cuál es el conjunto de puntos P tales que la distancia de P a L es el doble de la distancia de P a F ?

Solución:

Consideremos un punto $P = (x, y)$ que pertenece al conjunto en cuestión, entonces

$$\begin{aligned}d(P, L) &= 2d(P, F) \\|y - 3| &= 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\end{aligned}$$

2,5 puntos

$$(y - 3)^2 = 4(x - 1)^2 + 4y^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = 4(x - 1)^2 + 4y^2$$

$$9 = 4(x - 1)^2 + 3y^2 + 6y$$

$$9 = 4(x - 1)^2 + 3(y^2 + 2y)$$

$$12 = 4(x - 1)^2 + 3(y^2 + 2y + 1)$$

$$12 = 4(x-1)^2 + 3(y+1)^2$$

$$1 = \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2}$$

3 puntos

Entonces el conjunto de todos los puntos P tales que la distancia de P a L es el doble de la distancia de P a F , es la elipse de centro $(1, -1)$ y vértices $(1, 1)$, $(1, -3)$, $(1 + \sqrt{3}, -1)$ $(1 - \sqrt{3}, -1)$.

0,5 puntos

2. Encuentra la ecuación cartesiana de la hipérbola de focos $F_1 = (1, -2)$ y $F_2 = (5, -2)$ y pasa por el punto $(5, -5)$.

Solución:

El centro de la hipérbola es $(3, -2)$ por lo tanto su ecuación cartesiana es de la forma:

$$1 = \frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+2)^2}{b^2} \tag{1}$$

1,5 puntos

Además sabemos que a, b satisfacen la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde c es la mitad de la distancia entre los focos, es decir $c = 2$. Entonces tenemos:

$$4 = a^2 + b^2$$

1 punto

Reemplazando el punto $(5, -5)$ en (1) se tiene:

$$a^2 b^2 = 4b^2 - 9a^2$$

1 punto

Como $b^2 = 4 - a^2$, se tiene $a^2 < 4$ y reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}a^2(4 - a^2) &= 4(4 - a^2) + 9a^2 \\a^4 - 17a^2 + 16 &= 0\end{aligned}$$

$$(a^2 - 1)(a^2 - 16) = 0$$

1,5 puntos

Como $a^2 < 4$ se tiene que $a^2 - 16 \neq 0$ así que tenemos que $a^2 = 1$, por lo tanto $b^2 = 3$. Entonces la ecuación cartesiana de la hipérbola es:

$$1 = (x - 3)^2 - \frac{(y + 2)^2}{3}$$

o bien

$$1 = \frac{(x - 3)^2}{1^2} - \frac{(y + 2)^2}{(\sqrt{3})^2}$$

1 puntos