

Segunda Guía de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2009-2010

1. Calcule las siguientes primitivas:

a)

$$\int \cos^2(x)$$

f)

$$\int 5x \operatorname{sen}(x^2)$$

b)

$$\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(x)}$$

g)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}$$

c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

h)

$$\int x\sqrt{1+x}$$

d)

$$\int x \sec^2(x^2 + 3)$$

i)

$$\int \sqrt{1-x^2}$$

e)

$$\int x^2 \cos(x)$$

2. Si $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(x)}{2+x} dx = A$, calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+x} dx$ en función de A .

3. Pruebe que

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

(Ayuda: Encuentre una relación entre $\operatorname{Arccos}(u)$ y $\operatorname{Arccos}(-u)$ e intente con el cambio $u = \cos(x)$.)

4. Si $r(t)$ representa la tasa de crecimiento de un organismo en el año t .

¿Qué representa $\int_3^5 r(t) dt$?

5. Encuentre $a > 0$ tal que $\int_{-a}^a (1 - |x|) dx = 0$.

6. Derive $f(x) = \int_x^1 t^4 dt$.

7. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, muestre que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi)(b - a) = \int_a^b f(x)dx.$$

8. Encuentre todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$ tales que $\int_0^x f(t)dt = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
9. Encuentre todas las funciones dos veces diferenciables en $\mathbb{R}$ tales que

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

10. Encuentre todas las funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) - 1.$$

11. Una partícula se mueve sobre una recta de forma tal que su velocidad media en cualquier intervalo de tiempo $[a, b]$ es la misma que registra en el instante $\frac{a+b}{2}$. Demuestre que la velocidad $v(t)$ es de la forma $ct + d$ para ciertas constantes c, d .

(Ayuda: Derive la relación

$$\int_a^b v(t)dt = v\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

respecto a a y con respecto a b .)

12. Calcule los siguientes límites (Se supone que Ud. no conoce la regla de L'Hopital)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

e)

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$$

13. Calcule las siguientes primitivas:

a)	$\int \log(x)$	i)	$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$
b)	$\int \operatorname{Arctg}(x)$	j)	$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
c)	$\int \sec(x)$	k)	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
d)	$\int \sec^3(x)$	l)	$\int \frac{1}{x \log(x)}$
e)	$\int \operatorname{tg}(x)$	m)	$\int \frac{1}{4+x^2}$
f)	$\int \operatorname{cotg}(x)$	n)	$\int \frac{x}{x^2+x+1}$
g)	$\int \operatorname{cosec}(x)$	$\tilde{n})$	$\int \sqrt{1+4x^2}$
h)	$\int e^x \operatorname{sen}(2x)$	o)	$\int \frac{1}{1-\cos(x)}$

14. Pruebe que si a y b son números positivos distintos de 1, se tiene que $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$.

15. Grafique las siguientes funciones: tarde

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$.
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (0,5)^x$.
- c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{10}(x)$.
- d) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2(x)$.
- e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(-x^2)$.

16. ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = \log(x)$? ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = x$?
¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \log(x)$?

17. ¿Es cierto que para cualquier $x \geq 0$ se tiene que $e^x - 1 \leq xe^x$?
18. Las funciones $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ se llaman el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* respectivamente.
- Muestre que $\sinh'(x) = \cosh(x)$ y que $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
 - Muestre que $\cosh$ es par y $\sinh$ impar.
 - Muestre que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
 - Grafique $\cosh$ y $\sinh$.
19. Denote por $\hat{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Muestre que $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$. Muestre también que $\widehat{ab} = \hat{a} \cdot \hat{b}$. Muestre también que $\widehat{\lambda} \cdot A = \lambda A$, para cualquier matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. El conjunto $E = \left\{ \hat{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a \in \mathbb{R} \right\}$ se llama el conjunto de las matrices escalares. Muestre además que todo elemento de E conmuta con cualquier matriz de 2×2 . ¿Qué puede decir del resultado recíproco? Es decir, si una matriz conmuta con todo el mundo ¿necesariamente es una matriz escalar?.
20. Denote por $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Muestre que i satisface la ecuación $x^2 + \widehat{1} = 0$. Sea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Muestre que cualquier elemento de C se puede escribir como $\hat{a} + \hat{b} \cdot i$.
21. ¿Es cierto que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no puede ser el resultado de aplicar sucesivamente operaciones elementales por filas a la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$?
22. En un café de la ciudad, un día consumí un jugo dos cafés y un sandwich y pagué \$1200. Otro día junto a unos amigos consumimos tres jugos, cuatro cafés y cinco sandwiches y pagamos \$3800. Si otro día consumimos cuatro jugos, dos cafés y diez sandwiches. ¿Cuánto debemos pagar? ¿Falta información para responder a la pregunta? ¿Cómo decidir?.
23. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule $A^2, A^3, \dots, A^n$.
24. Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, ¿es cierto que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

25. Si $A^2 = 0$ ¿implica que $A = 0$?
26. Si $AB = 0$ ¿implica que $A = 0$ o bien $B = 0$?
27. Si $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $u, v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, ¿es cierto que $M(u + v) = Mu + Mv$?
28. Si $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $A, B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, ¿es cierto que $M(A + B) = MA + MB$?
29. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonal, ¿también lo es A^n ?
30. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ y $u \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, ¿existe $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ tal que $Mx = u$?
31. Existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ distinta de la identidad tal que $A^2 = I$?
32. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, y sea $C = (c_{ij}) = AB$. Escriba los valores de c_{kl} en función de a_{ij} y b_{ij} .
33. La siguiente tabla muestra lo consumido por un estudiante en el quiosco de la escuela durante una semana.

Productos	Lu	Ma	Mi	Ju	Vi
Manzanas	1	1	1	0	2
Botellas de Agua Mineral	0	2	1	0	1
Galletones de Avena	2	1	1	3	3

Dichos datos los podemos guardar en una matriz de 3×5 , a dicha matriz llamémosla C , si $P = (50, 300, 200)$ denota el vector precio, que se puede ver como una matriz de 1×3 . ¿Qué representan las coordenadas del vector fila PC ? Convénsase de lo interesante que puede ser considerar a PC en la economía. Si denotamos por $J = (1, 1, 1, 1, 1)$ ¿Qué representa $(PC)J^t$?

34. Siete diputados en siete comisiones están distribuidos como se describe en la siguiente la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde las columnas representan los distintos comisiones y las filas a los diputados, ponemos un 1 en el lugar (i, j) si el i -ésimo diputado está en la j -ésima comisión y un 0 en caso contrario, por ejemplo, el primer diputado está en la primera comisión, en la segunda y en la sexta. ¿Qué información guarda JA y AJ^t ? donde $J = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. ¿Es cierto que para cada par de diputados existe solo una comisión que los contiene? ¿Es cierto que cada par de comisiones tiene solo un diputado en común?

35. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 3x - 2y - 5z = 1 \\ 4x - 5z - 8w = 20 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} 4x + 7y + 5z = -1 \\ 3x - 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -4x - 2y + 9z = 10 \\ 12x - 14z - z = -10 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 2a + b + c = 3 \\ a - 2b - 3c = 3 \\ 4a - 5b - 10c = 8 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ 5x + 4y - 5z = 1 \\ 6x - 5z + 3w = 12 \\ x + y + z + 3w = 1 \\ 2x + 2z + 2w = 1 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2}z = 0 \end{cases}$$

36. Considere ocho ciudades $\{C_1, C_2, \dots, C_8\}$ y varios caminos que conectan a estas ciudades unas con otras. La matriz A , fue construida del siguiente modo: Si la ciudad i está conectada por un camino con la ciudad j , entonces en el lugar (i, j) aparecerá un 1, aparece un 0 en caso contrario. Se ha hecho un convenio: como la ciudad C_i está conectada con ella misma, pondremos un 1 en el lugar (i, i) .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Qué representa la suma de los valores de cada fila o cada columna?
- b) Note que la fila i coincide con la columna i . Cuando eso ocurre en una matriz decimos que la matriz es *simétrica*, pues graficamente es simétrica con respecto a la diagonal.
- c) ¿Cómo preguntarle a la matriz para saber cuantos caminos hay?
- d) Es fácil ver que no hay un camino entre C_1 y C_5 , pues en la posición $(1, 5)$ aparece un cero. Pero podemos ir de C_1 a C_4 y luego de C_4 a C_5 , en ese caso diremos que se fue de C_1 a C_5 por dos pasos. Se puede ir de C_1 a C_5 por dos pasos de otro modo que el mostrado anteriormente?
- e) ¿Cuáles ciudades no se pueden comunicar exactamente por dos pasos?
- f) ¿Hay alguna ciudad aislada? ¿Cómo la matriz responde a esa pregunta?
- g) ¿Cuál es la cantidad máxima de caminos que un terremoto puede destruir para que ninguna ciudad quede aislada?
- h) Calcule A^2 . ¿Qué representan los valores de la diagonal? ¿Qué significa que en algún lugar aparezca un cero? ¿Qué preguntas acerca de las conexiones entre ciudades puede responder A^2 ? ¿Cuáles respondería A^3 ?
- i) Haga un esquema gráfico dibujando las ciudades como puntos y los caminos como líneas entre los puntos. El dibujo que resulta se llama un *grafo* y la matriz A se llama la *matriz de adyacencia* del grafo, muy usado en teoría de códigos (Discos Compactos), en computación, en criptografía, combinatoria, geometrías finitas (muy relacionado al problema anterior) y otros.