Primera Guía de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Verano, 2009-2010

1. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hopital?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

2. Calcule los siguientes límites:

   a)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{cos^2(x)-1}{x^2}$$

   b)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x^2}$$

   c)
   $$\lim_{x\to \infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

   d)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)-x^2}{\cos(x)-1}$$

3. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   ¿Es f continua?¿Es f diferenciable? ¿Podría Ud. graficar f?

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2$. El TVM dice que $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para cierto ξ entre a y b. Muestre que el ξ del TVM en este caso es exactamente el punto medio entre a y b.

5. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   ¿Es f continua?¿Es f diferenciable?

6. Considere la función $f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{tg(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable?

7. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)-x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
¿Es f continua?¿Es f diferenciable?

8. Si $\emptyset \neq A \subseteq B$ y B es acotado superiormente, ¿Es cierto que
$$Sup(A) \leq Sup(B)?$$

9. Si $A \subseteq B$ y A es acotado inferiormente, ¿Es cierto que
$$Inf(A) \leq Inf(B)?$$

10. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, tales que $a \leq b \;\; \forall a \in A, \;\; \forall b \in B$. ¿Es cierto que
$$Sup(A) \leq b \; \forall b \in B?$$
Si además para cada $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ y $b \in B$ tales que $b - a < \epsilon$, ¿es cierto que $sup(A) = inf(B)$?

11. Para $A, B \subseteq \mathbb{R}$, defina $A + B = \{a + b/ \; a \in A, \;\; b \in B\}$. ¿Es cierto que A y B son acotados superiormente si y solamente si $A + B$ lo es ? ¿Es cierto que $Sup(A + B) = Sup(A) + Sup(B)$? Si su respuesta es negativa agregue condiciones para asegurar la igualdad.

12. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotadas. Defina $M_f = \sup\{f(x)/ \; x \in [a, b]\}$, $M_g = \sup\{g(x)/ \; x \in [a, b]\}$ y $M_{f+g} = \sup\{f(x) + g(x)/ \; x \in [a, b]\}$. ¿Es cierto que $M_{f+g} = M_f + M_g$?

13. Un auto se detiene cinco segundos después de que el conductor aplicó los frenos; mientras estos se aplican, se registran las siguientes velocidades

Tiempo (seg)	0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	5
Velocidad (Km/h)	100	82	71	60	40	26	15	0

   a) Haga un cálculo alto y uno bajo de la distancia recorrida por el auto después de que se aplicaron los frenos.
   b) En un esquema de velocidad contra tiempo, muestre cálculos altos y bajos, y la diferencia entre ellos.

14. Rogelio decide correr un maratón y trás él, en bicicleta, irá su amiga Guillermina para medirle la velocidad cada $15min$. Rogelio empieza con fuerza, pero después de una hora y media está tan cansado que tiene que detenerse. La información que Guillermina tomó se resume en la siguiente tabla:

Tiempo (min)	0	15	30	45	60	75	90
Velocidad (m/h)	12	11	10	10	8	7	0

   a) Si se supone que la velocidad de Rogelio es siempre decreciente, obtenga los cálculos alto y bajo de la distancia que recorrió durante la primera media hora.

   b) Dé los cálculos alto y bajo de la distancia total recorrida.

   c) ¿Con qué frecuencia hubiese necesitado Guillermina medir el paso de Rogelio para hallar los cálculos alto y bajo, con diferencia de no más de 0,1 millas de distancia real recorrida?

15. Un mecanismo cíclico hace que se mueva una bolita en una línea recta. La velocidad de la bolita en el instante t viene dada por la función $v(t) = 2sen(\pi t)$. (t está medido en horas y v está medido en m/h) Aproxime la distancia recorrida por la bolita en el lapso de una hora.

16. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y considere la partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$. Denote por $s(f, P)$ a la suma inferior de f respecto a P y por $S(f, P)$ a la suma superior de f respecto a P.

   a) Muestre que $s(f, P) \leq S(f, P)$.

   b) Muestre que si Q es una partición que contiene a P (un refinamiento de P.), entonces $s(f, P) \leq s(f, Q)$.

   c) Muestre que si Q es una partición que contiene a P (un refinamiento de P.), entonces $S(f, P) \geq S(f, Q)$.

   d) Muestre que si P' es una partición cualquiera de $[a, b]$, entonces $s(f, P) \leq S(f, P')$.

   e) Muestre que

$$inf\{S(f, P)/\ P \text{ partición}\} \geq sup\{s(f, P)/\ P \text{ partición}\}$$

17. Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables, ¿ Es cierto que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)?$$

18. Considera $n \in \mathbb{N}$ y define $I_n = \displaystyle\int_0^n [x]dx$. Encuentra el valor de I_n en términos de n.

19. Para cada $x \in \mathbb{R}$ define $I(x) = \displaystyle\int_0^x [t]dt$. Grafica I.

20. Si f es par y $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = A$. Calcula $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$, en términos de A.

21. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y P una partición de $[a, b]$. ¿Qué relación hay entre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ y $S(f, P)$?

22. Dibujar la región limitada por los gráficos de las funciones $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$ y calcular su área.

23. Encuentra una función tal que su derivada sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(2x)$. (Ayuda: La respuesta no es la función real definida para cada x por $G(x) = \sin(2x)$)

24. Considera $n \in \mathbb{Z}$, ¿Cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|dx$?

25. El teorema fundamental del calculo dice que cualquier función continua tiene una función primitiva. Encuentre la primitiva F de $f(x) = |x|$, tal que $F(0) = 0$.

26. Sabemos que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función diferenciable en (a, b). ¿Qué puede Ud. decir de $G(x) = \int_x^b f(t)dt$?

27. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t)dt$.¿Qué podría Ud. decir de $F'(x)$? (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

28. *[No es fácil]* Sea f continua y no negativa en $[a, b]$ tal que existe $\xi \in [a, b]$ con $f(\xi) > 0$, entonces pruebe que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

29. Pruebe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n+1}(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n(x)dx.$$

30. Hallar f diferenciable en $\mathbb{R}$ y un número real a tal que $\int_a^x f(t)dt = cos(x) - \frac{1}{2}$.

31. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de periodo T. Pruebe que $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$ es una función constante.

32. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f,P) = s(f,P)$. ¿ Es f una función constante?

33. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

34. Encuentre el área acotada por $y = \sqrt{x},\ \ y = x - 2$ y el eje X.

35. Muestre que $\int_1^4 \frac{1}{t}dt > 1$.

36. Sin hacer cálculos explique por que $\int_{2\pi}^{4\pi} cos(x)dx = 0$

37. Sin hacer cálculos explique por que $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = \int_0^{\pi} sen(x)dx$

38. Se estima que dentro de x meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. Si la población actual es de 5000 personas. ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

39. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} sen(t)dt$.¿Qué podría Ud. decir de $F'(x)$? (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)

40. ¿Por qué cree Ud. que al número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se le llama el promedio de f en $[a,b]$?

41. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva (es decir, $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$). Pruebe que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función inyectiva.

42. ¿Cuál es el error en: " $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}/_{-1}^{1} = -2$"?

43. Dé un sentido físico a "$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$".

44. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, biyectiva y creciente tal que $\int_0^1 f(x)dx = a$. Calcule $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ en función de a. (Ayuda: Piense, por ejemplo, en $f(x) = x^2$ y en $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.)

45. Si f es continua en $[a,b]$ y si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces pruebe que existe $\xi \in [a,b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

46. Calcule las siguientes integrales:

    a) $\int_{-2}^3 |t|dt$

    b) $\int_0^{\pi} sen(t)dt$

    c) $\int_0^{\pi} tsen(t)dt$

    d) $\int_0^{\pi} cos(x)sen(x)dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(z)dz$

f) $\int_1^4 u\sqrt{u}du$

g) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

h) $\int_\pi^{2\pi} ucos(u^2)du$

i) $\int_0^1 x\sqrt{2-x}dx$

j) $\int_0^\pi t^2sen(t)dt$

47. ¿Es $Ax^2 + By^2 = C$, con A, B, C números positivos, la ecuación de una elipse?

48. Dados dos puntos P y Q describa el conjunto de puntos X tales que la distancia de P a X es igual a la distancia de X a Q.

49. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene por focos a $F_1 = (2, 1)$ y $F_2 = (3, 1)$, y el semieje mayor mide 6. Grafique la elipse.

50. Encuentre la ecuación de la parábola de foco $(3, 1)$ y directriz $x+1 = 0$.

51. Grafique el conjunto de puntos P cuya distancia al eje Y es cuatro veces su distancia al punto $(5, 0)$

52. Dado un punto P y una recta L describa el conjunto de puntos X tales que $d(P, X) = \frac{1}{2}d(P, L)$.

53. Encuentre el área de una elipse de semieje mayor a y semiejemenor b.

54. Sean a y b números positivos fijos. Considere el conjunto

$$E = \{(acos(t), bsen(t))/\ t \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Qué conjunto describe E?

55. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $bx^2 + ay^2 = a^2b^2$ en el punto (x_0, y_0)?

56. Sea T la recta tangente en un punto P de a una elipse, de focos F_1 y F_2, muestre que el ángulo que forman T con PF_1 es el mismo que el ángulo que forman T con PF_2.

57. ¿Existe una propiedad similar a la anterior en una elipse? ¿y en una hipérbola?

58. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $bx^2-ay^2 = a^2b^2$ en el punto (x_0, y_0)?

59. La máxima distancia de la tierra al sol es $94,56$ millones de millas y su distancia mínima es $91,45$ millones de millas. ¿Cuánto mide el semieje mayor y menor?

60. Grafique los siguientes conjuntos, describiendo focos, semiejes mayores y menores, directrices, vértices, asintotas, etc:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2 - y^2 = 0\}$
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; 4x^2 + 4y^2 = 1\}$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; 16x^2 - 9y^2 = 144\}$
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; 4x^2 + 9y^2 = -1\}$
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; 4x + 4y^2 = 1\}$
   f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; 3x^2 + 6x + y^2 + 6y = 10\}$
   g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; 5x^2 - 20x - 2y^2 + 4y = 18\}$