Prueba Global

1. Considera un tanque de 800 litros de volumen, que contiene agua flúorada en toda su capacidad. Cada litro de solución contiene 1,2 gramos de flúor. Al tanque ingresa a razón de 2,5 litros por segundo una solución de flúor de una concentración de 1 gramo de flúor por litro y sale solución del tanque a razón de 3 litros por segundo.

   a) Si $f(t)$ denota la cantidad de flúor en cada instante t, demuestra que $f(t)$ satisface la ecuación diferencial:

   $$y' + \frac{3}{800 - 0{,}5t} y = 2{,}5$$

   b) Describe $f(t)$ en cada instante t .

   c) ¿Cuál es la concentración del flúor en el tanque en el momento que el volumen de solución en el tanque es la mitad del volumen inicial?

   Solución:

   a)

   $$f'(t) = v_e - v_s \qquad (1)$$

   Donde v_e denota la velocidad con que entra flúor al tanque y v_s denota la velocidad con que sale flúor del tanque.

   $$v_e = 2{,}5 \frac{g}{s}$$

   Y

   $$v_s = 3C(t)$$

   Donde C(t) es la concentración de fluor en el tanque en el instante t. Como el volumen del tanque es $800 - 0{,}5t$, y la cantidad de flúor en el tanque es $f(t)$ (medido en gramos), entonces $C(t) = \frac{f(t)}{800 - 0{,}5t}$. Así se tiene que:

   $$v_s = 3 \frac{f(t)}{800 - 0{,}5t} \frac{g}{s}$$

   Por lo tanto reemplazando en (1) se tiene:

   $$f'(t) = 2{,}5 - \frac{3f(t)}{800 - 0{,}5t}$$

O lo que es lo mismo

$$f'(t) + \frac{3f(t)}{800 - 0{,}5t} = 2{,}5 \qquad (2)$$

Que es lo que se quería probar. ■

b) Como $f(0)$ es la masa inicial de flúor en el tanque en el instante inicial, se tiene que:

$$f(0) = 1{,}2 \times 800\ g = 960\ g$$

Además la función $g(t) = a(800 - 0{,}5t)$ es solución de (2), para cierto valor de a, si reemplazamos $g(t)$ en (2) se obtiene:

$$-0{,}5a + 3a = 2{,}5$$
$$2{,}5a = 2{,}5$$
$$a = 1$$

Entonces $g(t) = 800 - 0{,}5t$ es una solución particular de (2).
Consideremos la ecuación homogénea asociada a (2) y la resolveremos:

$$h'(t) + \frac{3h(t)}{800 - 0{,}5t} = 0$$
$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{-3}{800 - 0{,}5t}$$
$$\log\big(h(t)\big) = 6\log(800 - 0{,}5t) + C$$
$$h(t) = K(800 - 0{,}5t)^6$$

Luego $f(t) = K(800 - 0{,}5t)^6 + (800 - 0{,}5t)$. Evaluando en $t = 0$, se obtiene:

$$960 = f(0) = K(800)^6 + (800)$$
$$K = \frac{160}{800^6}$$

Entonces

$$f(t) = \frac{160}{800^6}(800 - 0{,}5t)^6 + (800 - 0{,}5t) \qquad (3) \quad ■$$

c) De (3) se deduce que la concentración en el tanque en cada instante t es:

$$C(t) = \frac{160}{800^6}(800 - 0{,}5t)^5 + 1$$

Como el volumen del tanque en cada instante es $800 - 0{,}5t$, entonces necesitamos encontrar $C(t)$ cuando $800 - 0{,}5t = 400$, es decir, la concentración en el instante en que el volumen es 400 litros es:

$$\frac{160}{800^6}(400)^5 + 1 = \frac{160}{800 \times 2^{\,5}} + 1 = (1 + \frac{1}{160})\frac{g}{l} \qquad \blacksquare$$

2. Considera la ecuación cuadrática en dos variables:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y = 11$$

a) Muestra que corresponde a una elipse. Indica las coordenadas de los focos.
b) Grafica la elipse indicando las coordenadas de los vértices y del centro.

Solución:

a) Factorizando resulta:

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) = 11$$

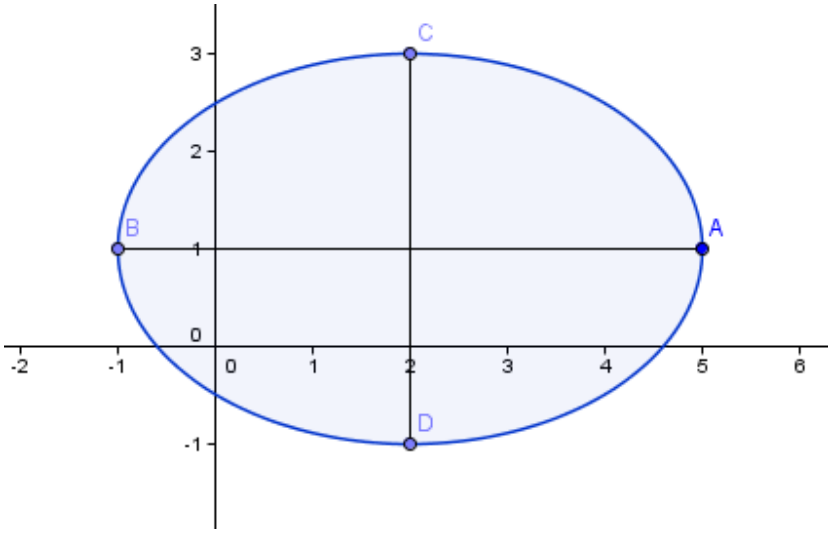
Completando cuadrados:

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 11 + 16 + 9$$
$$4(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 36$$
$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

Que corresponde a una elipse centrada en $(2{,}1)$. Como $3^2 - 2^2 = 5$, entonces la distancia del centro al foco es $\sqrt{5}$. Como el eje mayor de la elipse es paralelo al eje X, entonces los focos son:

$$F_1 = \left(2 + \sqrt{5}, 1\right) \; y \; F_2 = \left(2 - \sqrt{5}, 1\right) \qquad \blacksquare$$

b) Como ya dijimos el centro de la elipse es $(2{,}1)$ y los vértices en el eje horizontal están a distancia 3 del centro, en cambio en el eje vertical están a distancia 2 del centro. Así se tiene que los vértices son $A = (5{,}1), B = (-1{,}1), C = (2{,}3)$ y $D = (2, -1)$.



3. Considera los planos $\Pi = \{\lambda(3,0,7) + \eta(1,1,8) + (1,1,1) : \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$

$$\Pi' = \{(x, y, z) : x = z - y \in \mathbb{R}\}$$

   a) ¿Cuál es la ecuación cartesiana de Π?
   b) ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano Π'' que contiene a la rectas $L = \{\lambda(1,1,-1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{\lambda(1,-1,3) : \lambda \in \mathbb{R}\}$?
   c) Determine la intersección $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$

Solución:

a) Un vector normal a Π es de la forma $n = (-7, a, 3)$, pues el producto punto entre n y $(3,0,7)$ es cero. Además como el producto punto entre n y $(1,1,8)$ también es cero, se tiene que $-7 + a + 24 = 0$, por lo tanto $a = -17$. Así tenemos que un vector normal a Π es $(-7, -17, 3)$, por lo tanto la ecuación cartesiana de Π es:

$$-7x - 17y + 3z = d$$

Evaluando el punto $(1,1,1)$ se tiene que $d = -21$. Por lo tanto la ecuación del plano es:

$$-7x - 17y + 3z = -21$$

b) $\Pi'' = \{\lambda(1,1,-1) + \eta(1,-1,3) : \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$

El producto cruz entre $(1,1,-1)$ y $(1,-1,3)$ es $(2,-4,-2)$. Además como el origen pertenece a ambos rectas, también pertenece al plano, por lo tanto la ecuación cartesiana de Π'' es:

$$2x - 4y - 2z = 0$$

O equivalentemente:

$$x - 2y - z = 0$$

c) La intersección de los tres planos corresponde a todos los puntos (x, y, z) que satisfacen el sistema de ecuaciones :

$$\begin{gathered} x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ -7x - 17y + 3z = -21 \end{gathered}$$

Restando las dos primeras ecuaciones resulta que $y = 0$. Reemplazando se tiene el siguiente sistema de 2×2

$$\begin{gathered} x - z = 0 \\ -7x + 3z = -21 \end{gathered}$$

O equivalentemente

$$\begin{gathered} x = z \\ -7x + 3x = -21 \end{gathered}$$

O equivalentemente

$$\begin{gathered} x = z \\ x = \frac{21}{4} \end{gathered}$$

Entonces:

$$\Pi \cap \Pi' \cap \Pi'' = \{(\frac{21}{4}, 0, \frac{21}{4})\}$$