

# Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Primavera, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

**Resuelva solo uno de los siguientes problemas**

1. Considera la recta  $L : y = 3$  y el punto  $F = (1, 0)$  ¿Cuál es el conjunto de puntos  $P$  tales que la distancia de  $P$  a  $L$  es el doble de la distancia de  $P$  a  $F$ ?

Solución:

Consideremos un punto  $P = (x, y)$  que pertenece al conjunto en cuestión, entonces

$$d(P, L) = 2d(P, F)$$
$$|y - 3| = 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

2,5 puntos

$$(y - 3)^2 = 4(x - 1)^2 + 4y^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = 4(x - 1)^2 + 4y^2$$

$$9 = 4(x - 1)^2 + 3y^2 + 6y$$

$$9 = 4(x - 1)^2 + 3(y^2 + 2y)$$

$$12 = 4(x - 1)^2 + 3(y^2 + 2y + 1)$$

$$12 = 4(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2$$

$$1 = \frac{(x - 1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y + 1)^2}{2^2}$$

3 puntos

Entonces el conjunto de todos los puntos  $P$  tales que la distancia de  $P$  a  $L$  es el doble de la distancia de  $P$  a  $F$ , es la elipse de centro  $(1, -1)$  y vértices  $(1, 1)$ ,  $(1, -3)$ ,  $(1 + \sqrt{3}, -1)$   $(1 - \sqrt{3}, -1)$ .

0,5 puntos

2. Encuentra la ecuación cartesiana de la hipérbola de focos  $F_1 = (1, -2)$  y  $F_2 = (5, -2)$  y pasa por el punto  $(5, -5)$ .

Solución:

El centro de la hipérbola es  $(3, -2)$  por lo tanto su ecuación cartesiana es de la forma:

$$1 = \frac{(x - 3)^2}{a^2} - \frac{(y + 2)^2}{b^2} \tag{1}$$

1,5 puntos

Además sabemos que  $a, b$  satisfacen la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde  $c$  es la mitad de la distancia entre los focos, es decir  $c = 2$ . Entonces tenemos:

$$4 = a^2 + b^2$$

1 punto

Reemplazando el punto  $(5, -5)$  en (1) se tiene:

$$a^2 b^2 = 4b^2 - 9a^2$$

1 punto

Como  $b^2 = 4 - a^2$ , se tiene  $a^2 < 4$  y reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$a^2(4 - a^2) = 4(4 - a^2) + 9a^2$$

$$a^4 - 17a^2 + 16 = 0$$

$$(a^2 - 1)(a^2 - 16) = 0$$

1,5 puntos

Como  $a^2 < 4$  se tiene que  $a^2 - 16 \neq 0$  así que tenemos que  $a^2 = 1$ , por lo tanto  $b^2 = 3$ . Entonces la ecuación cartesiana de la hipérbola es:

$$1 = (x - 3)^2 - \frac{(y + 2)^2}{3}$$

o bien

$$1 = \frac{(x - 3)^2}{1^2} - \frac{(y + 2)^2}{(\sqrt{3})^2}$$

1 puntos