3. Demostrar que,

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)dx}{1+\cos^2(x)} = \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

<u>Solución:</u>

Cambio de variable

$\cos(x) = u$

$ar\cos(u) = x$

$du = -\sin(x)dx$

$dx = -\dfrac{du}{\sin(x)}$

$u = \cos(0) = 1$

$u = \cos(\pi) = -1$

Ahora debemos probar

$$-\int_1^{-1} \frac{ar\cos(u)du}{1+u^2} = \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Trabajemos sobre,

$$-\int_1^{-1} \frac{ar\cos(u)du}{1+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{ar\cos(u)du}{1+u^2} = \int_{-1}^{o} \frac{ar\cos(u)du}{1+u^2} + \int_0^1 \frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}$$

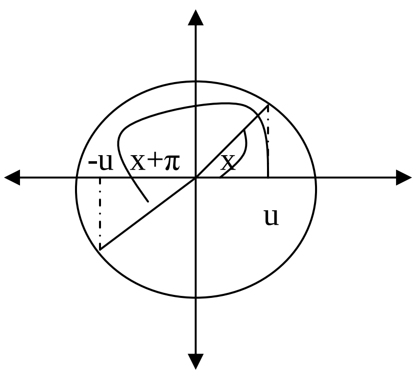
Lo que acabamos de hacer es dividir la integral en dos.

Luego la relación entre los arcosenos;

$\cos(x) = u \Rightarrow x = ar\cos(u)$

$\cos(x+\pi) = -u \Rightarrow x+\pi = ar\cos(-u)$

$ar\cos(u) + \pi = ar\cos(-u)$



Analicemos por separado la primera integral,

$$\int_{-1}^{o}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}+\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}$$

Primera integral,

$$\int_{-1}^{o}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}=\int_{-1}^{o}\frac{(ar\cos(-u)-\pi)du}{1+u^2}=\int_{-1}^{o}\frac{(ar\cos(-u))du}{1+u^2}-\pi\int_{-1}^{o}\frac{du}{1+u^2}$$

$Cambio$

$-u=s$

$-du=ds$

$--1=s\Rightarrow s=1$

$-0=s\Rightarrow s=0$

$$-\int_{1}^{o}\frac{ar\cos(s)ds}{1+s^2}+\pi\int_{1}^{o}\frac{ds}{1+u^2}=\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(s)ds}{1+s^2}-\pi\int_{0}^{1}\frac{ds}{1+u^2}$$

$$\int_{-1}^{o}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}=\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(s)ds}{1+s^2}-\pi\int_{0}^{1}\frac{ds}{1+u^2}$$

Luego esto debe ser igual a,

$$\pi\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{o}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}+\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}$$

$$\pi\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(s)ds}{1+s^2}-\pi\int_{0}^{1}\frac{ds}{1+u^2}++\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(u)du}{1+u^2}$$

$$\pi\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{0}^{1}\frac{ar\cos(s)ds}{1+s^2}$$

12. Una partícula se mueve sobre una recta de forma tal que su velocidad media en cualquier intervalo de tiempo [a,b] es la misma que registra en el instante (a+b)/2. Demuestre que la velocidad v(t) es de la forma ct+d para ciertas constantes c,d.

Solución:

Voy a cambiar el nombre de las variables, $a = x_1 \wedge b = x_2$,

El promedio de una función se obtiene por,

$\Pr omedio = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} v(t)dt$ este es el promedio de v(t) en [x_1, x_2].

Por enuncido, "*forma tal que su velocidad media en cualquier intervalo de tiempo [a,b] es la misma que registra en el instante (a+b)/2*"

Esto implica que,

$$v\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} v(t)dt$$

Por teorema fundamental del cálculo,

$$v\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = \frac{V(x_2) - V(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ahora, por teorema del valor medio,

Existe un $\xi \in [x_1, x_2]$ tal que,

$$v\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = \frac{V(x_2) - V(x_1)}{x_2 - x_1} = V'(\xi)$$

Por teorema fundamental del cálculo,

$$v\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = \frac{V(x_2) - V(x_1)}{x_2 - x_1} = v(\xi)$$

$$v\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) = v(\xi)$$

Esto implica que,

$$\frac{x_2+x_1}{2}=\xi$$
$$x_2+x_1=2\xi$$

Multipliquemos por “a” y sumemos “b”,

$$x_2+x_1=2\xi$$
$$a\cdot(x_1+x_2)=2\cdot a\cdot\xi$$
$$a\cdot(x_1+x_2)+b=2a\cdot\xi+b$$
$$a\cdot(x_1+x_2)\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}+b\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=2a\cdot\xi+b$$
$$a\cdot\frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{x_2-x_1}+b\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=2a\cdot\xi+b$$
$$\frac{a{x_2}^2-a{x_1}^2+bx_2-bx_1}{x_2-x_1}=2a\cdot\xi+b$$

Ahora, sumaremos cero.

$$\frac{a{x_2}^2-a{x_1}^2+bx_2-bx_1+c-c}{x_2-x_1}=2a\cdot\xi+b$$
$$\frac{a{x_2}^2+bx_2+c-\left(a{x_1}^2+bx_1+c\right)}{x_2-x_1}=2a\cdot\xi+b$$
$$\frac{a{x_2}^2+bx_2+c-\left(a{x_1}^2+bx_1+c\right)}{x_2-x_1}=\left(a\cdot\xi^2+b\xi+c\right)'$$

Finalmente como sabemos que,

$$\frac{V(x_2)-V(x_1)}{x_2-x_1}=V'(\xi)$$

Esto implica que,

$$Vx)=ax^2+bx+c$$

Pero por teorema fundamental,

$$V'(x)=v(t)=2ax+b$$

Es decir, es de la forma *cx+d*.

Q.E.D