Integrales Impropias

Definición 7.1 (Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado)). *Sea $f : [a, +\infty) \to$ diremos que f es integrable en $[a, +\infty)$ si se cumple que:* Integral Imp Primera

(i) *$\forall x \in (a, +\infty)$, f es integrable en $[a, x]$ y además*

(ii) *Existe el límite definido por*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$$

Notación: Si una función es integrable en el intervalo:$[a, \infty)$ entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de f y se le denota

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f.$$

Observaciones

1. Si el límite $\lim_{x \to \infty} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia es convergente y si no existe se dice que la integral impropia es divergente.

2. De una manera análoga se definen las integrales de 1° especie siguiente

   i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f$

   ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{\infty} f$ donde la constante $c \in$ puede ser cualquiera. En esta última definición es importante que las dos integrables de la derecha existan o que sean convergente. Si alguna de estas integrales no converge entonces la integral de la izquierda tampoco .

Ejemplo 7.1.
Dado $a > 0$, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$.
Claramente $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en $[a, b]$ para cualquier $b > a$. Veamos el límite

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \to \infty} \int_a^x \frac{dt}{t} = \lim_{x \to \infty} [\ln\,(\frac{x}{a})] = \nexists.$$

Por lo tanto se trata de una integral divergente.

IMPORTANTE: Este tipo de integrales se llaman *tipo P (EN ESTE CASO TIPO ALFA)*

Ejemplo 7.2.
Dado $a > 0$ y $\alpha \neq 1$, estudiar la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
Nuevamente basta con estudiar el límite:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\Big|_a^x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{-1}{a^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha > 1 \\ \nexists & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto esta integral impropia es convergente cuando $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha < 1$.
Juntando estos dos ejemplos podemos resumir diciendo que

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{Diverge} & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Definición 7.2 (Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas)). *Sea $f : [a, b) \to$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ ssi:* Integral Im Segund

(i) $\forall x \in (a, b) f$ *es integrable en* $[a, x]$

(ii) *El límite* $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ *existe.*

Observaciones

1) Cuando el límite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia converge, y cuando no existe se dice que la integral impropia diverge.

2) Se anota
$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f = \int_a^{-b} f.$$

3) La primera condición de integrabilidad de este tipo de funciones exige, entre otras cosas, que la función f debe ser acotada en todo intervalo (a, x), es decir, este tipo de funciones se caracterizan por tener una asíntota vertical en $x = b$.

4) En forma análoga se definen las integrales impropias siguiente:

(i) $\int_{a^+}^b f = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f$

(ii) $\int_{a^+}^{b^-} f = \int_{a^+}^c f + \int_c^{b^-} f, \quad c \in (a, b)$

En esta última definición la integral entre a^+ y b^- converge ssi las dos integrales de la derecha convergen por separado.

Ejemplo 7.3.
Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ para diversos valores de $\alpha \in$.
Caso $\alpha = 1$. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^{b^-} \frac{dx}{b-x} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln\,(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\ln\,(b-a) - \ln\,\varepsilon\} = \nexists. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso la integral impropia es divergente.
Caso $\alpha \neq 1$. En este caso los cálculos son

$$\begin{aligned} \int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1 \\ \nexists & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Juntando estos dos ejemplos podemos resumir diciendo que

$$\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{Diverge} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Algunos criterios de convergencia para integrales impropias

Teorema 7.1 (Criterio de Comparación). *Sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces:
Si $\int_a^{+\infty} g$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge .
Recíprocamente si $\int_a^{+\infty} f$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g$ diverge

---

Ejemplo 7.4.
Estudiar la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\text{sen}\ x|}{x^2} dx$.
Claramente se tiene que

$$0 \leq \frac{|\text{sen}\ x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Luego como la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ es conocidamente convergente, se concluye directamente que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\text{sen} x|}{x^2} dx$ es también convergente.

Ejemplo 7.5. (Problema 5.f)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_2^\infty \frac{1}{\ln(x)}dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.1** anteriormente enunciado.
Es claro que,

$\ln(x) < x$ Para todo $x \in [2,\infty]$

Luego, elevando a la menos uno.

$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(x)}$ Para todo $x \in [2,\infty]$

Por **teorema 7.1,** como la $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$ [1]diverge, la integral $\int_2^\infty \frac{1}{\ln(x)}dx$ también diverge.

Ejemplo 7.6 (Problema 5.q)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} sen\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.1** anteriormente enunciado.

Es claro que,

$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ Para todo $x \in [0,1]$

Luego, dividiendo la ecuación por $\sqrt{x}$.

---

[1] Diverge, pues la integral $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx = \ln(\infty)$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ Para todo } x \in [0,1]$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ Para todo } x \in [0,1]$$

Como los valores absolutos son mayores que cero,

$$0 \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ Para todo } x \in [0,1]$$

Por **teorema 7.1,** como la $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ [2] converge, la integral $\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|dx$ también converge.

Ejemplo 7.7 (Problema 5.h)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

<u>Solución</u>:

Para resolver este problema se ocupa un truco que consiste en integrar por partes la ecuación, para luego realizar el análisis de convergencia.

Primero veamos el problema con límites generales, es decir *a,b*.

Aplicar la integración por partes para demostrar que

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} + \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Y deducir que $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ existe.

[2] Converge, pues la integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x}\, dx = -\cos x \cdot \frac{1}{x}\Big|_a^b - \int_a^b -\cos x \cdot -\frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Analizaremos dos limites por separado,

- El de 0 a 1y el de 1 al infinito.

Nota: Esta división en los limites la realizamos, pues la ecuación anterior se indefine en cero.

En particular,

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\cos 1}{1} - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx;$$

la integral última existe, ya que existe la integral

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

Por otra parte, la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

existe y es igual a $\int_0^1 f(x)\, dx$, donde f es la función continua con

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

La integral de 0 a 1, es claramente acotada, pues

$0 \le \sin(x) \le x$ Para todo $x \in [0,1]$

Ahora, al dividir por **x**.

$0 \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$ Para todo $x \in [0,1]$

Por **teorema 7.1,** como la $\int_0^1 1dx$ converge, la integral $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ también converge.

Teorema 7.2 (Criterio del cuociente de funciones). *Sean f y g funciones continuas en $[a,+\infty)$ y no negativas en $[b,+\infty)$, donde $b \geq a$ y tales que:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Ejemplo 7.8 (Problema 5.i)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_0^\infty \frac{3x+4}{5x^3+2x+1}dx$$

<u>Solución:</u>

Usemos el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones)** anteriormente enunciado.

Siempre que se tenga un polinomio dividido por otro polinomio (como en el caso en que nos encontramos), la función con la que debo comparar el problema es la siguiente.

Primero escojo el mayor grado del numerador y el mayor grado del denominador.

Es decir, mí $g(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

Luego, ocupando el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones).**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x+4}{5x^3+2x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+4x^2}{5x^3+2x+1}$$

Dividiendo por el de mayor grado,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2}{5x^3+2x+1}\frac{1/x^3}{1/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2}{5x^3+2x+1}=\frac{3}{5}$$

Por **teorema 7.2,** como la $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ [3] converge, la integral $\int_1^\infty \frac{3x+4}{5x^3+2x+1}dx$ también converge.

Ejemplo 7.9 (Problema 5.j)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones)** anteriormente enunciado.

La función con la que vamos a comparar a $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es $g(x)=\frac{1}{x}$

Luego, ocupando el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones).**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$

Por **teorema 7.2,** como la $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ [4] diverge, la integral $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ también diverge.

---

[3] Converge, pues la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, es tipo ***p*** con ***p=2>1.***

[4] Diverge, pues la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\ln(\infty)=\infty$

Ejemplo 7.10 (Problema 5.k)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones)** anteriormente enunciado.

La función con la que vamos a comparar a $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ es $g(x)=\frac{1}{x^2}$

Luego, ocupando el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones).**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=1$$

Por **teorema 7.2,** como la $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ [5] converge, la integral $\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$ también converge.

Ejemplo 7.11 (Problema 5.l)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones)** anteriormente enunciado.

La función con la que vamos a comparar a $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ es $g(x)=\frac{1}{x^2}$

Luego, ocupando el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones).**

---

[5] Converge, pues la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, es tipo ***p*** con ***p=2>1.***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=1$$

Por **teorema 7.2,** como la $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ [6] converge, la integral $\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$ también converge.

Ejemplo 7.12 (Problema 5.l)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones)** anteriormente enunciado.

La función con la que vamos a comparar a $\frac{\ln(x)}{x}$ es $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

Luego, ocupando el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones).**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right]$$

Por L' Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

Por **teorema 7.2,** como la $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x}dx$ [7] diverge, la integral $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx$ también diverge.

---

[6] Converge, pues la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, es tipo ***p*** con ***p=2>1.***

[7] Diverge, pues la integral $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x}dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^\infty=\infty$, es tipo ***p*** con ***p=1/2 < 1.***

Otro método para resolver este problema, es integrar por partes.

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx$$

Consideremos,

$$f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{x}$$
$$g'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow g(x)=\ln(x)$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx=[\ln(x)\ln(x)]_1^\infty-\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}$$
$$2\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx=[\ln^2(x)]_1^\infty$$
$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{2}[\ln^2(x)]_1^\infty$$
$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}dx=\infty$$

Por lo tanto, la integral diverge.

Ejemplo 7.13 (Problema 5.m)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_0^\infty te^{-t}dt$$

Solución:

Integremos por partes,

$$\int_0^\infty te^{-t}dt$$

Sea,

$$f(t)=t\Rightarrow f'(t)=1$$
$$g'(t)=e^{-t}\Rightarrow g(t)=-e^{-t}$$

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = -\left[\frac{t}{e^t}\right]_0^\infty - \int_o^\infty -e^{-t}dt$$

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = -\left[\frac{t}{e^t}\right]_0^\infty + \int_o^\infty e^{-t}dt$$

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = -\left[\frac{t}{e^t}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{e^t}\right]_0^\infty$$

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = -\left[\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} - 0\right] - \left[\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}}_{=0} - \frac{1}{e^0}\right]$$

El primer limite le aplicamos el L' Hopital.

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = -\left[\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}}_{=0} - 0\right] + 1$$

$$\int_0^\infty te^{-t}dt = 1$$

Como la integral es igual a uno, implica que converge.

Ejemplo 7.14 (Problema 5.n)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$$

<u>Solución:</u> Para esta integral debemos hacer un cambio de variable.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$$

$$\sqrt{t} = u \Rightarrow u^2 = t$$

$$dt = 2udu$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

Como es un función par

$$2\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$ [8]

Esto implica que la integral converge.

Ejemplo 7.15 (Problema 5.ñ)

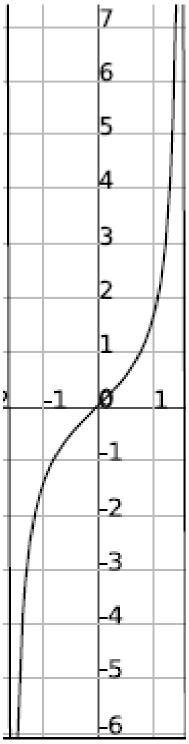
Decida si la siguiente integral converge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dt$$

Solución: Para esta integral debemos hacer un cambio de variable.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

El grafico de la tan(x) es como sigue,



[8] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$ este es un resultado conocido pero algo difícil de demostrar.

Se sigue que,

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Esto debido a que la tangente se indefine en $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2} = \pi$$

Esto implica que la integral converge.

Ejemplo 7.16 (Problema 5.o)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx$$

Solución:

Usemos el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones)** anteriormente enunciado.

Siempre que se tenga un polinomio dividido por otro polinomio (como en el caso en que nos encontramos), la función con la que debo comparar el problema es la siguiente.

Primero escojo el mayor grado del numerador y el mayor grado del denominador.

Es decir, mí $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Luego, ocupando el **teorema 7.2 (criterio del cuociente entre funciones).**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

Dividiendo por el de mayor grado,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\frac{1/\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=1$$

Por **teorema 7.2,** como la $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ [9] diverge, la integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$ también diverge.

Otra forma de hacer el presente ejercicio, es la siguiente:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$$

<u>Solución:</u> Para todo $x \geq 2$

$$x+\sqrt{x}<x^2$$

$$\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x+\sqrt{x}} \;/\sqrt{\;}$$

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

[9] Diverge, pues la integral $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, es tipo ***p*** con ***p=1/2<1.***

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x}dx<\int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$$

$$\infty+\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx<\int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx+\underbrace{\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx}_{finito}$$

$$\infty<\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

Esto implica que la integral diverge.

Ejemplo 7.17 (Problema 5.p)

Decida si la siguiente integral converge

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$$

Solución: Para todo $x\geq 1$

$$x^4<1+x^4$$

$$\frac{1}{1+x^4}<\frac{1}{x^4}\,/\sqrt{\ }$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}<\frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx<\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$$

Esto implica que la integral converge.

Problema 6

La velocidad promedio de moléculas en un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)\int_0^\infty v^3 \exp\left(\frac{-Mv^2}{2RT}\right)dv$$

Donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas, y v es la velocidad molecular. Muestre que,

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{M\pi}}$$

<u>Solución</u>:

Debemos realizar un cambio de variable,

$$\frac{Mv^2}{2RT} = x \Rightarrow v^2 = \frac{2RT}{M}x$$

$$\frac{M\,2vdv}{2RT} = dx$$

$$dv = \frac{RT}{Mv}dx$$

Si $v = 0 \Rightarrow x = 0$
Si $v = \infty \Rightarrow x = \infty$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)\int_0^\infty \frac{2RT}{M}x \cdot v \exp(-x)\frac{RT}{Mv}dx$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{RT}{M}x\exp(-x)dx$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{RT}{M}\int_0^\infty x\exp(-x)dx$$

Luego, la integral $\int_0^\infty x\exp(-x)dx = 1$ por ejercicio *m*.

$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{RT}{M}$ (Esta mal el resultado propuesto).

Problema 7

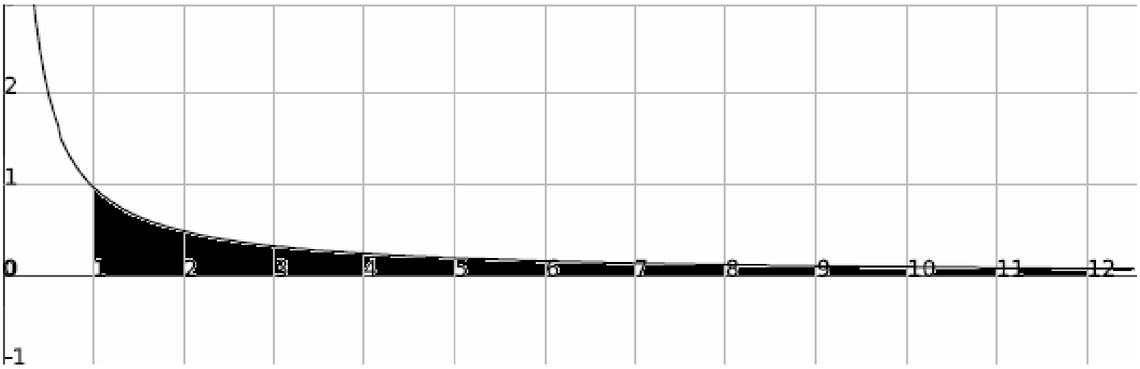
Considere la región,

$$R = \left\{ (x,y)/\, x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

Que como vimos es una área infinita. Muestre que al rotar esta región en torno al eje X se obtiene un sólido que tiene volumen finito.

Solución:

La región R es la siguiente,



Es claro que la ecuación general de rotación en torno al eje x, es lasiguiente:

$$v = \pi \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

En nuestro caso,

$$a = 0$$

$$b = \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$v = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx) = \pi \int_1^\infty x^{-2} dx$$

$$v = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = \pi$$

Convergencia absoluta

Definición 7.4 (Convergencia absoluta). *Sea* $f\colon [a,+\infty) \to$ *, diremos que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\displaystyle\int_a^{\infty} |f|$ *converge.*

Notar que en un principio la definición no dice nada acerca de la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$. Sin embargo el siguiente teorema muestra la relación entre la convergencia absoluta y la convergencia.

Teorema 7.3. *Sea* $f\colon [a,+\infty) \to$ *, se tiene que*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

Observación: La recíproca del Teorema anterior **no** es necesariamente cierto.

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge} \not\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente.}$$

Ejemplo 7.5.
Consideremos $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, entonces $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ converge, pero no así $\int\limits_1^{\infty} |f(x)|dx$.

2. El limite $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, si existe, se designa por $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, y se le da el nombre de “integral impropia”.

(a) Determinar $\int\limits_1^{\infty} x^r dx$, si r<-1.

(b) Demostrar que $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$, que se puede decir de $\int\limits_1^{2^n} \frac{1}{x} dx$?.

(c) Supóngase que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ y que existe $\int_0^\infty f$. Demostrar que si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq 0$, entonces también existe $\int_0^\infty g$.

(d) Explicar por qué $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ existe. Indicación: Separar esta integral en 1.

Solución:

(a)

$$\int_1^\infty x^r\ dx = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1} = \frac{-1}{r+1}$$

(ya que $r+1<0$, con lo que $\lim_{N\to\infty} N^{r+1} = 0$).

(b) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty}(\ln(b)) = \infty \Rightarrow$ *diverge*

En el siguiente paso hay que hacer n cambios de variable para las integrales de la forma x=2u.

$$\int_1^{2^n} \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx}_{n \text{ veces}}$$

$$= n\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Al ser $\int_1^2 1/x\ dx > 0$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \int_1^{2^n} 1/x\ dx = \infty$.

(c) La función $I(N) = \int_0^N g$ es claramente creciente, y está acotada superiormente por $\int_0^\infty f$. En consecuencia, $\lim_{N\to\infty} I(N)$ existe (es el supremo de $\{I(N)\colon\ N \geqslant 0\}$).

(d) Está claro que $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\ dx$ existe si $\int_1^\infty 1/(1+x^2)\ dx$ existe; esta última integral existe por la parte (c), ya que $\int_1^\infty 1/x^2\ dx$ existe por la parte (a), y $1/(1+x^2) \leqslant 1/x^2$.

Problema 8

Una de las funciones más importantes del análisis es la función gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

(a) Demostrar que la integral impropia $\Gamma(x)$ está definida si $x > 0$.

(b) Aplicar la integración por partes (más precisamente, la versión del problema anterior para la integral impropia) para demostrar que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(c) Demostrar que $\Gamma(1) = 1$, y deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cualquier número natural n.

Solución:

a) La integral

$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ ciertamente existe, ya que existe $\int_1^\infty t^{-2}dt$ (problema 5.a), y para los t suficientemente grandes, tenemos $e^{-t}t^{x-1} < t^{-2}$ (pues exponencial crece muy rápido).
Por otra parte, si $t > 0$, entonces $e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$; puesto que la integral $\int_0^1 t^{x-1}dt$ existe para $x > 0$, se sigue que $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ existe para $x > 0$ (es la integral impropia si $x < 1$)

(b)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$$

$$= -e^{-t}t^x \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty xe^{-t}t^{x-1}\,dt$$

$$= 0 + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt = x\Gamma(x).$$

(Si $x < 1$, entonces utilizamos también una segunda versión de la integración por partes para tratar la integral de 0 a 1.)

(c) $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$

Demuestra esto que $\Gamma(1) = (1-1)!$. Si $\Gamma(n) = (n-1)!$, entonces $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$, con lo que la fórmula es válida para todo n, por inducción.

Los demás:

Problema 4

Demuestre que la siguiente integral es acotada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Solución:

Para que una función sea acotada, debe ser acotada superior e inferiormente.

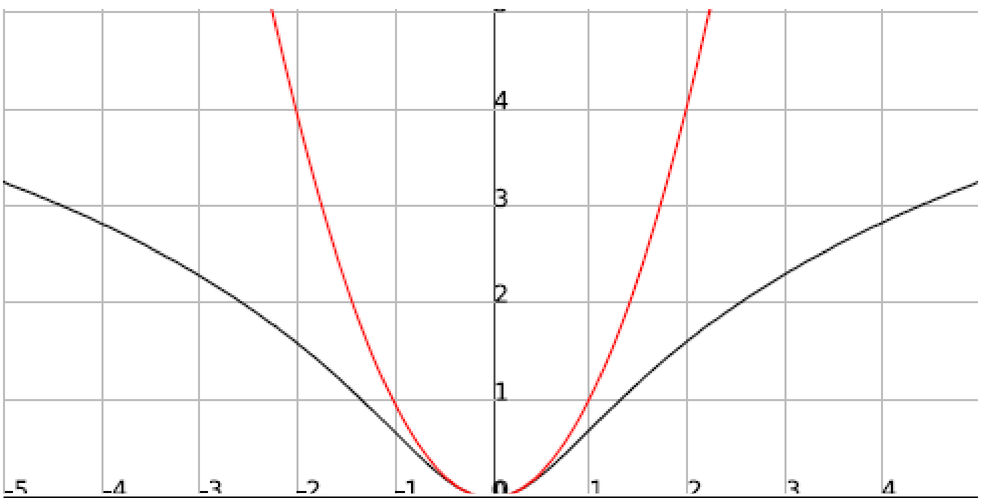
Cota Inferior:

Como la función exponencial es mayor que cero, siempre estaremos sumando área positiva.

Luego, $0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Cota Superior:

Estamos de acuerdo con que $\ln(x^2+1) \leq x^2$, se puede confirmar por la grafica.



Al aplicar exponencial,

$$x^2 + 1 \le e^{x^2}$$

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2+1}$$

Ahora, integremos entre menos infinito e infinito.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

Por problema 5.ñ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \le \pi$$

Finalmente,

$$0 \le \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \le \pi$$

Los que faltan de la parte 5,

a)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 1$$

Convergente

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x)\right]_0^1 = \ln(1) - \lim_{x \to 0} \ln(x) = \infty$$

Divergente

c)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

Esta integral no es continua en cero, luego no es integrable en ese dominio.

d)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln(x)} dx = \left[\ln(\ln x)\right]_2^{\infty} = \infty$$

Divergente

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+2x+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(1+x)^2}dx = [\arctan(x+1)]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

Convergente