Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Matemática II

Guía de estudio
Primera prueba Matemáticas II

Integrales de funciones exponenciales y logarítmicas
Funciones exponencial y logarítmica
Sólidos de revolución y largo de una curva
Fracciones parciales

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Calcular integrales por partes que involucran exponenciales y logaritmos.

i) $\int \frac{\log(\log x)}{x}dx$

Solución: Se integra por partes

$$\frac{1}{x} = du \Rightarrow u = \log x$$

$$v = \log(\log x) \Rightarrow dv = \frac{1/x}{\log x}$$

$$\int \log(\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx = (\log x) \cdot \log(\log x) - \int \log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= (\log x) \cdot \log(\log x) - \log x.$$

ii) $\int \cos(\log(x))dx$

Solución: También por partes hacemos la tratamos de la siguiente forma,

$$1 = du \Rightarrow u = x$$

$$v = \cos(\log x) \Rightarrow dv = -\sin(\log x)\frac{1}{x}$$

$$\int 1 \cdot \cos(\log x)\, dx = x \cos(\log x) + \int x \operatorname{sen}(\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= x \cos(\log x) + \int 1 \cdot \operatorname{sen}(\log x)\, dx$$

De nuevo por partes,

$$1 = du \Rightarrow u = x$$

$$v = \sin(\log x) \Rightarrow dv = \cos(\log x)\frac{1}{x}$$

$$= x \cos(\log x) + \left[x \operatorname{sen}(\log x) - \int x \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx\right]$$

$$\int \cos(\log x)dx = x\cos(\log x) + x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)dx$$

así que

$$\int \cos(\log x)\, dx = \frac{x \cos(\log x) + x \operatorname{sen}(\log x)}{2}.$$

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

iii) $\int x^3 e^{x^2} dx$

<u>Solución</u>:

$x^2 = u \Rightarrow du = 2x$

$dv = xe^{x^2} \Rightarrow v = \dfrac{e^{x^2}}{2}$, esto es porque si integro $\int xe^{x^2} = \dfrac{e^{x^2}}{2}$, al hacer el cambio de variable $x^2 = u$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2(xe^{x^2})\ dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int xe^{x^2}\ dx$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2}.$$

iv) $\int x(\log x)^2 dx$

<u>Solución</u>:

$x = du \Rightarrow u = \dfrac{x^2}{2}$

$v = (\log x)^2 \Rightarrow dv = 2\log x \cdot \dfrac{1}{x}$

$$\int x(\log\ x)^2\ dx = \frac{x^2(\log\ x)^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ \log\ x \cdot \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \frac{x^2(\log\ x)^2}{2} - \int x\ \log\ x\ dx$$

Ahora debemos resolver $\int x \log x dx$, por partes de nuevo

$x = du \Rightarrow u = \dfrac{x^2}{2}$

$v = \log x \Rightarrow dv = \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{x^2(\log\ x)^2}{2} - \left(\frac{x^2\ \log\ x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\ dx \right)$$

$$= \frac{x^2(\log\ x)^2}{2} - \frac{x^2\ \log\ x}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Calcular las siguientes integrales por cambio de variable trigonométrico o exponencial (estas integrales involucran exponenciales y logaritmos).

Para las siguientes integrales será necesario recordar:

$$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x)$$

$$\int \csc x dx = -\ln(\csc x + \cot x)$$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Solución:

Pongamos $x = \tan\ u$, $dx = \sec^2\ u\ du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec^2\ u\ du}{\sqrt{1 + \tan^2\ u}} = \int \sec\ u\ du = \log(\sec\ u + \tan\ u)$$

$$= \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Sea $x = \sec\ u$, $dx = \sec\ u\ \tan\ u\ du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec\ u\ \tan\ u\ du}{\sec\ u \sqrt{\sec^2\ u - 1}} = \int 1\ du = u = \operatorname{arc\,sec}\ x.$$

(Esto puede expresarse también, utilizando funciones más conocidas, en la forma $\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{x^2 - 1})$.)

iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Solución:

Sea $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec^2 u\, du}{\tan u \sqrt{1 + \tan^2 u}} = \int \frac{\sec u\, du}{\tan u\, du} = \int \csc u\, du$$

$$= -\log(\csc u + \cot u) = -\log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

$$= \log\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}\right).$$

iv) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

Solución:

Pongamos $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}\, \cos u\, du = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1 + \cos 2u}{2}\, du$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$$

$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} u \cos u}{2}$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

v) $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

Solución:

Pongamos $x = \sec u$, $dx = \sec u \tan u\, du$. La integral se convierte en

$$\int \sqrt{\sec^2 u - 1}\, \sec u \tan u\, du = \int \sec u \tan^2 u\, du$$

$$= \int (\sec u)(\sec^2 u - 1)\, du = \int \sec^3 u\, du - \int \sec u\, du$$

Luego basta calcular la integral de $\int \sec^3 u du$, usando integral por partes.

$$u = \sec u \Rightarrow du = \sec u \tan u$$
$$dv = \sec^2 u \Rightarrow v = \tan u$$

$$\int \sec u \sec^2 u du = \sec u \tan u - \int \sec u \tan^2 u du$$

$$= \sec u \tan u - \int \sec u \left(\sec^2 u - 1\right) u du$$

$$\int \sec^3 u du = \sec u \tan u - \int \sec^3 u du + \int \sec u du$$

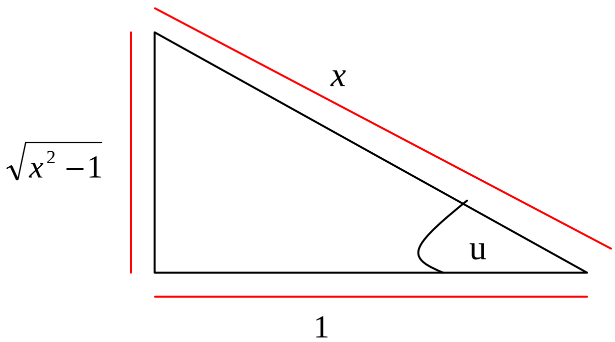
$$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + \ln(\sec u + \tan u)\right)$$

Reemplazando,

$$\int \sec^3 u du - \int \sec u du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + \ln(\sec u + \tan u)\right) - \ln(\sec u + \tan u)$$

$$\int \sec^3 u du - \int \sec u du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u - \ln(\sec u + \tan u)\right)$$

Devolviéndonos en el cambio de variable (veamos la geometría).



Luego,

$$\sec u = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \cos u$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \Rightarrow \tan u = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1}$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Las siguientes integrales suponen sustituciones de distintos tipos. Lo que no se puede sustituir es la agudeza de ingenia, pero existe una regla general a seguir: sustitúyase una expresión que aparezca con frecuencia o de modo prominente; si aparecen dos expresiones dificultosas, inténtese expresarlas en términos de alguna expresión nueva. Y no se olvide que, por lo general resulta útil expresar x directamente en función de u, para hallar la expresión adecuada que ha de ponerse en vez de dx.

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

i) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

Solución:

Pongamos $u = e^x$, $x = \log u$, $dx = 1/u\ du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{du}{u(1+u)}$$

Por fracciones parciales,

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{1+u} = \frac{a + au + bu}{u(1+u)} = \frac{a + u(a+b)}{u(1+u)}$$
$$a = 1$$
$$a + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u(1+u)} &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \log u - \log(1+u) \\ &= x - \log(1+e^x). \end{aligned}$$

ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

Solución:

La sustitución $u = e^x$ lleva a una integral que exige todavía otra sustitución; esto está bien, pero las dos sustituciones pueden hacerse a la vez.

Pongamos $u = \sqrt{1+e^x}$, $x = \log(u^2 - 1)$, $dx = 2u/(u^2-1)\ du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{2u}{u(u^2-1)} du$$

Por fracciones parciales,

$$\frac{2u}{u(u-1)(u+1)} = \frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}$$
$$= \frac{a(u+1) + b(u-1)}{(u-1)(u+1)} = \frac{u(a+b) + (a-b)}{u(1+u)(u-1)}$$

Reemplazamos a y b, en las fracciones anteriores.

$a+b=0$

$a-b=2$

$\Rightarrow a=1$

$\Rightarrow b=-1$

$$\int \frac{2u}{u\left(u^2-1\right)}du = \int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{-1}{u+1}\right)dx$$
$$= \ln(u-1)-\ln(u+1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$$

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$

Solución:

Pongamos $u = \sqrt{\sqrt{x}+1}$, $x=(u^2-1)^2$, $dx = 4u(u^2-1)\ du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{4u(u^2-1)\ du}{u} = \frac{4}{3}u^3 - 4u$$
$$= \frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2} - 4(\sqrt{x}+1)^{1/2}.$$

iv) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

Solución:

Pongamos $u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $dx = 2u\ du$. La integral se convierte en

$$\int 2ue^u\ du = 2ue^u - 2\int e^u\ du$$
$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}.$$

Por ultimo uno que tiene cambio de variable , racionalización, cambio de variable trigonométrico, etc.

v) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}dx$

Solución:

Pongamos $u = 1/x$, $x = 1/u$, $dx = -1/u^2\, du$. La integral se convierte en

$$\int \sqrt{\frac{1/u-1}{1/u+1}} \cdot u^2 \cdot -\frac{1}{u^2}\, du = -\int \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}}\, du = -\int \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\, du.$$

Pongamos ahora $u = \operatorname{sen} t$, $du = \cos t\, dt$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos t} \cos t\, dt &= \int (1-\operatorname{sen} t)\, dt \\ &= t + \cos t \\ &= \operatorname{arc\,sen} u + \sqrt{1-u^2} \\ &= \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.\end{aligned}$$

Esto va para los que quieren integrar más brujido

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots$$

<u>Desarrollo:</u>

Integramos por partes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n-1}(x)(-cos(x))'dx$$

$$= [-cos(x)sen^{2n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sen^{2n-2}(x)dx$$

$$= [-cos(x)sen^{2n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-sen^2(x))sen^{2n-2}(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n-2}(x)dx$$

$$(3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

Analogamente,

$$(4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

Despejando π de ecuación (3),

$$(5)\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx$$

Despejando 1 de ecuación (4),

$$(6)1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx$$

Luego el cuociente entre la ecuación (5) y (6),

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx}$$

Ahora nos resta demostrar que el cuociente de las dos integrales tiende a 1

$$0 < sen^{2n+1}(x) < sen^{2n}(x) < sen^{2n-1}(x), \;\; para\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Integrando entre 0 y $\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n-1}(x)dx \quad / \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx}$$

tenemos,

$$1 < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx} < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n-1}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx}$$

$$1 < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx} < \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$1 < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n+1}(x)dx} < \frac{2n+1}{2n}$$

Finalmente,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \quad qed$$

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

Aplicaciones de la Integral: (sólidos de revolución "Volúmenes", largo de curvas, etc)

1. La ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ describe a una elipse centrada en el origen del plano de coordenadas. Calcule el solido de revolución de la elipse anteriormente descrita y el área que encierra la ecuación.

Solución:

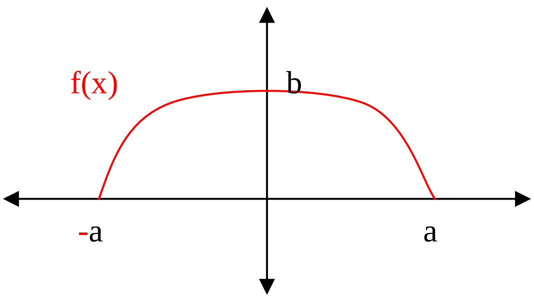
Para resolver este problema ocuparemos la formula para encontrar el sólido de revolución.

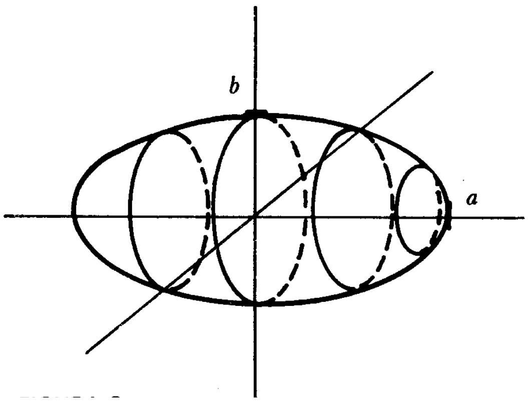
$$Solido=\pi\int\left|f(x)\right|^2dx$$

Luego, podemos escribir de la siguiente forma la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$
$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$
$$y=\pm\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

Luego, si representamos a $f(x)=\sqrt{b^2-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}$ que es gráficamente lo siguiente:





Reemplazando en la formula para sólido de revolución tenemos,

$$Volumen = \pi \int \left| f(x) \right|^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \left| \sqrt{b^2 - \left(\frac{bx}{a} \right)^2} \right|^2 dx$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 - \left(\frac{bx}{a} \right)^2 \right) dx = \pi \left[b^2 x - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi \left[\left(b^2 a - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{a^3}{3} \right) - \left(b^2 (-a) - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{(-a)^3}{3} \right) \right] = 2\pi \left[b^2 a - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{a^3}{3} \right]$$

$$= 2\pi \left[ab^2 - \frac{ab^2}{3} \right] = \frac{4\pi}{3} \left[ab^2 \right]$$

Ahora, para calcular el área que encierra la ecuación de la elipse solo basta integrar f(x) y multiplicarlo por 2, pues f(x) solo nos da la mitad superior.

$$Área = \int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - \left(\frac{bx}{a} \right)^2} dx$$

$$= b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx$$

El próximo paso es hacer un cambio de variable trigonométrico.

$$\frac{x}{a} = \sin(u) \Rightarrow x = a\sin(u) \Rightarrow dx = a\cos(u) du$$

$$\frac{a}{a} = \sin(u) \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{-a}{a} = \sin(u) \Rightarrow u = -\frac{\pi}{2}$$

$$b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) du$$

Usando $\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1 \Rightarrow \cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)}$

$$ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) du = ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$$

Ahora usando la propiedad trigonométrica $\cos^2(u) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2}$

$$ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)du = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2u)}{2}\right)du$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))du = \frac{ab}{2}\left[\left(u+\frac{\sin(2u)}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\right)\right]$$

$$=\frac{ab}{2}[\pi]$$

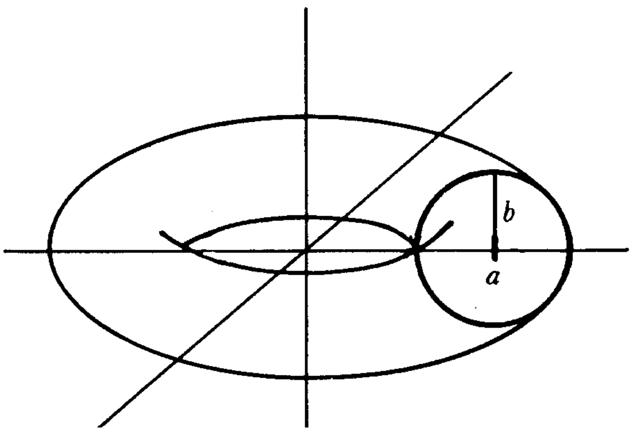
Pero como hemos solo calculado la mitad del área debemos multiplicar dos el resultado.

$$Área = \int_{-a}^{a} f(x)dx = ab\pi$$

Notar que la circunferencia es un caso particular de la elipse, cuando $b = a$.

Hallar el volumen del «toro» (figura 3), que se obtiene al hacer girar el círculo $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ $(a > b)$ alrededor del eje vertical.

<u>Solución</u>:



Como el circulo gira en torno al eje vertical debemos despejar la inversa de y (o sea la inversa de f(x)), que básicamente es despejar x.

Ayudante: Ignacio Trujillo Silva
Críticas y comentarios a itrujill@ing.uchile.cl

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - b^2 = 0$$

$$x_{+/-} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\left(a^2 + y^2 - b^2\right)}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4\left(b^2 - y^2\right)}}{2} = a \pm \sqrt{y^2 b^2}$$

Nuestro x_+ representa a la curva que está desde ***a*** hacia la derecha, constituye la mitad de la circunferencia, y x_- representa la curva a la izquierda de ***a*** (la otra mitad de la circunferencia).

Si hacemos rotar x_+ tendremos una pastilla sólida, o sea con el hueco relleno, pero si hacemos rotar también x_- y se lo restamos a la pastilla anterior obtendremos la dona o neumático que queremos.

$$Volumen = \pi \int \left| f(x) \right|^2 dx$$

$$\pi \int \left| x_+ \right|^2 dx - \pi \int \left| x_- \right| dx = \pi \int \left| x_+ \right|^2 - \left| x_- \right|^2 dy$$

$$= \int_{-b}^{b} \left[\left(a + \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 - \left(a - \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 \right] dy$$

$$= \int_{-b}^{b} \left[a^2 + 2a\sqrt{b^2 - y^2} + b^2 - y^2 - \left(a^2 - 2a\sqrt{b^2 - y^2} + b^2 - y^2 \right) \right] dy$$

$$4a \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - y^2}\, dy = 4ab \int_{-b}^{b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2}\, dy$$

$$\frac{y}{b} = \sin(u) \Rightarrow dy = b\cos(u)du$$

$$\frac{b}{b} = \sin(u_1) \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{-b}{b} = \sin(u_0) \Rightarrow u_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Reemplazando el cambio trigonométrico,

$$4ab \int_{-b}^{b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2}\, dy = 4ab^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du$$

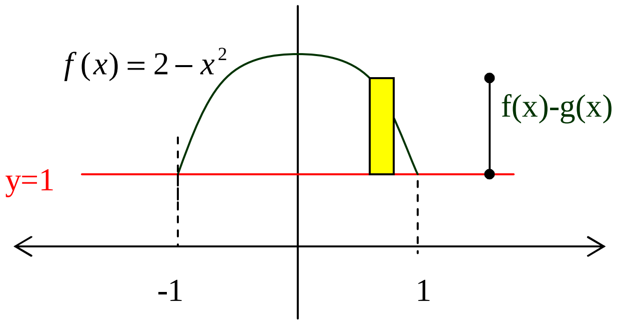
Ocupando cálculo ejercicio anterior,

$$4ab^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = 4ab^2 \frac{\pi}{2}$$

$$Volumen\_Toro = 2\pi ab^2$$

2. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ en torno a la recta $y = 1$, como se muestra en la figura siguiente.

Solución:



Comenzaremos por hallar los puntos de corte de f y g. Igualando f(x)=g(x).

$$2 - x^2 = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Para calcular el radio (el alto del rectángulo amarillo), debemos restar las dos ecuaciones.

$$R(x) = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - 1 = 1 - x^2$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} R^2(x) dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx$$

$$\pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) dx = \pi \left(x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{15}$$

Definición de largo de una curva:

Si la función $y = f(x)$ representa una curva suave en el instante $[a,b]$ la **longitud de arco** de f entre a y b viene dador por:

$$Dis\tan cia = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

3. Un objeto volante sale del origen y asciende por el eje y. Al mismo tiempo un perseguidor parte del punto (1,0) y se dirige en todo momento hacia él con velocidad doble que la suya. La ecuación de trayectoria del perseguidor es,

$y = \frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + 2\right)$ ¿Cuánta distancia a recorrido el objeto el objeto en el instante de ser capturado y cuanto a recorrido su perseguidor?

<u>Solución</u>:

Lo primero que debemos hacer es calcular la distancia recorrida por el perseguidor y luego calcular la distancia recorrida por el objeto.

$$y` = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-1}{2}}\right)$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x} - 2\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x} - 2\right)$$

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}\right]_0^1 = \left[\frac{x\sqrt{x}}{3} + \sqrt{x}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

Para calcular la distancia recorrida por el objeto basta tomar f(0)=2/3, esto implica que el objeto a recorrido 2/3 por el eje y. En cambio su perseguidor a recorrido 4/3. Notar que el perseguidor llevaba el doble de la velocidad del objeto, por ello obtenemos que el perseguidor recorre e doble de la distancia que recorre el objeto.

4. Calcule la longitud de la curva de $y = \cosh(x)$, para $x \in [-1,1]$

Solución:

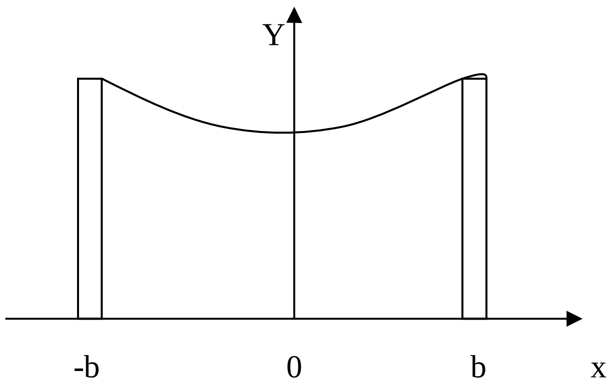
Ocupemos $Distancia = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$, luego $\begin{array}{l} f(x) = \cosh(x) \\ f'(x) = \sinh(x) \end{array}$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [\sinh(x)]^2}\,dx$, debemos ocupar que $\begin{array}{l} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \text{ [1]} \\ \cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x) \end{array}$

Entonces tenemos,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [\sinh(x)]^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \cosh(x)dx =$$
$$= \sinh(x)\Big|_{-1}^{1} = \sinh(1) - \sinh(-1)$$
$$= 2\sinh(1)$$

5. La figura muestra una línea telefónica que cuelga entre dos postes, en $x = -b$ y en $x = b$. Toma la forma de una catenaria, cuya ecuación es $y = c + a\cosh\left(x/a\right)$



i) Calcula la longitud del cable en términos de las constantes positivas a, b y c.
ii) Dos postes telefónicos están a 50 pies de distancia y la longitud del cable entre ellos es de (51*a) pies, si el punto más bajo del cable debe estar a 20 pies de altura respecto al suelo, ¿Cuan alto debe sujetarse el cable?”

Solución:

---

[1] La demostración de esta propiedad es bastante simple, solo se debe considerar los sinh y cosh como una exponencial.

i) Es el cálculo que hemos hecho repetitivamente, lo doy de inmediato.

$$Dis\tan cia = \int_{-b}^{b} \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2a\sinh\left(\frac{b}{a}\right)$$

ii) El objetivo es encontrar $y(b) = c + a\cosh\left(\frac{b}{a}\right)$ tengo las siguientes ecuaciones:

(1) $2b = 50 \Rightarrow b = 25$ (Distancia entre los postes)

(2) $c + a = 20$ (El punto más bajo del cable debe estar a 20 pies de altura, primera derivada igual a cero, y segunda mayor que cero, implica mínimo local).

$$f(x) = c + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(0) = \cosh\left(\frac{0}{a}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} > 0$$

Lo que implica que x es un mínimo

$$f(0) = c + a = 20$$

(3)

$$51a = 2a\sinh\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{51}{2}\sinh\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{b}{a} = \arcsin h\left(\frac{51}{2}\right)$$

(Resolución de la integral de largo de una curva).

$$\Rightarrow a = \frac{25}{\arcsin h\left(\frac{51}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow c = 20 - \frac{25}{\arcsin h\left(\frac{51}{2}\right)}$$

$$y(b) = c + a\cosh\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$y(25)=20-\frac{25}{\operatorname{arcsin}h\left(\frac{51}{2}\right)}+\left(\frac{25}{\operatorname{arcsin}h\left(\frac{51}{2}\right)}\right)\cosh\left(\operatorname{arcsin}h\left(\frac{51}{2}\right)\right)$$

Notar que y(25) define la altura del poste, pues su base se encuentra en 25.

5. Una crisis económica hace que los ingresos anuales de una compañía hayan descendido de \$742.000 en 1988 a \$632.000 en 1990. Si los ingresos siguen un comportamiento exponencial de decrecimiento, ¿Cuál sea su valor en 1991?

<u>Solución</u>:

Consideraremos t igual a cero, en el año 1988.
Luego, usaremos el modelo exponencial $y=ce^{kt}$, donde medimos a t en años. Por condición inicial C, sabemos que $c=742.000$.
Luego, el año 1990 representa el año $(t=1990-1988=2)$, pues hemos considerado a 1988 como $(t=0)$. Siguiendo $y=632.000$ cuando $(t=2)$, luego tenemos

$$y=632.000=742.000e^{2k}$$
$$0{,}85=e^{2k}\ /\ln()$$
$$\ln(0{,}85)=2k$$
$$k=\frac{\ln(0{,}85)}{2}=-0{,}08$$

Finalmente, en el año 1991 $(t=1991-1988=3)$, podemos esperar que los ingresos de la compañía sean iguales a

$$y=742.000e^{\cdot 3k}=742.000e^{3\cdot-0{,}08}\approx 583.678$$

Se debe tener claro que lo que se resuelve en este tipo de problemas son las ecuaciones diferenciales de la forma $y'=ky$.

6. Las ventas S (en miles de unidades) de un producto nuevo, después de estar en el mercado durante t años, vienen dadas por una función exponencial $S=ce^{\frac{k}{t}}$

a) Hallar S en función de t, si se han vendido 5000 unidades después de 1 año, y el punto de saturación el mercado es de 30000.
b) ¿Cuántas unidades se han vendido en 5 años?
c) Dibujar una grafica de esta función de ventas.

<u>Solución</u>:

a) Usaremos el modelo exponencial $s = ce^{k/t}$, donde medimos a t en años, por condición inicial se define C.

La saturación se puede interpretar como el $\lim_{t\to\infty} S = \lim_{t\to\infty} ce^{k/t}$, un análisis conveniente y bastante aceptado es buscar el máximo de la función ventas (S), el resultado de ese análisis es el limite descrito anteriormente.

$\lim_{t\to\infty} ce^{k/t} = c$, luego como la saturación es un dato $c = 30.000$.

También sabemos por enunciado que en el año 1 se han vendido 5000 unidades, que se traduce

$$\frac{1}{6} = e^{k/1}$$
$$-\ln(6) = k$$

Finalmente S, es igual a la función $S = 30000e^{-\ln(6)/t}$

b) En b) solo basta reemplazar $(t = 5)$, en la función ventas (s).

$$S(5) = 30000e^{-\ln(6)/5} \approx 20965$$

Se debe tener claro que este problema específico es resolver la ecuación diferencial de la forma $y' = -\frac{k}{t^2} y$.

El estroncio -90 es un isótopo radiactivo peligroso. Debido a su semejanza con el calcio, es facilmente absorvido por los huesos del cuerpo humano. La vida media del estroncio-90 es de 28 años. Si los huesos absorven cierta cantidad, debido a la exposición a una explosión nuclear, ¿qué porcentaje permanecerá en ellos después de 50 años? [1]

Solución y Puntaje:

La función que describe la cantidad de materia en función del tiempo es

$$f(t) = K\exp(-kt), \qquad \text{(1 punto)}$$

medidos en alguna unidad de masa y t en años, K es la masa inicial.

Luego

$$f(50) = K\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right). \qquad \text{(1 punto)}$$

Luego el porcentaje de Estroncio-90 que queda después de 50 años es:

$$\frac{K}{2} = f(28) = K\exp(-28k) \quad \text{(1 punto)}$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-28k)$$

$$-ln(2) = -28k$$

$$k = \frac{ln(2)}{28}. \quad \text{(1,5 puntos)}$$

Luego

$$f(50) = K\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right). \quad \text{(1 punto)}$$

Luego el porcentaje de Estroncio-90 que queda después de 50 años es:

$$100\exp\left(\left(\frac{-ln(2)}{28}\right)50\right)\,\% \approx 29\,\% \quad \square$$

$$\text{(1,5 puntos)}$$