Ayu. Ignacio Trujillo Silva
Críticas y correcciones a itrujill@ing.uchile.cl
Programa Académico de Bachillerato
Universidad de Chile

Guía de Sucesiones
Matemáticas II

Cosas que hay que tener claras.

SUCESIÓN MONÓTONA

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es:

$$(i)\ Creciente\ \ si\ a_n \leq a_{n+1}\ \ para\ toda\ n;$$
$$(ii)\ Decreciente\ \ si\ \ a_n \geq a_{n+1}\ \ para\ toda\ n.$$

Si una Sucesión es creciente o decreciente, se llama Monótona.

$$(i)\ Si\ \ a_n < a_{n+1}\ \ es\ estrictamente\ creciente.$$
$$(ii)\ \ Si\ \ a_n > a_{n+1}\ \ es\ estrictamente\ decreciente.$$

SUCESIÓN ACOTADA

Definición. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior.

Teorema.

$$(i)\ \ Una\ sucesión\ monótona\ acotada\ es\ convergente$$
$$(ii)\ \ Una\ sucesión\ monótona\ convergente\ es\ acotada$$

1. Hecho en clases (es muy larga para escribirla de nuevo).

2. En cierto juego de mesa para dos personas, en el que se utiliza un dado, cada jugador necesita sacar un seis para empezar a jugar. Los dos jugadores se turnan para lanzar el dado. Hallar la probabilidad de que la persona que lanzó primero obtenga el primer seis.

Solución:

Definamos la siguiente sucesión.

P_n = Es la probabilidad de que el jugador 1 gane en el n-esimo lanzamiento.

¿Cual es la probabilidad que el primer jugador gane en el primer lanzamiento?

Es que le salga un 6 al tiro.

$$P_1 = \frac{1}{6}$$

¿Cual es la probabilidad que el primer jugador gane en el segundo lanzamiento?

Es que, no me salga un 6 en el primer lanzamiento (la probabilidad es 5/6), que mi enemigo tampoco le salga el 6 en su primer lanzamiento (la probabilidad es 5/6), pero que a mi me salga un 6 en mi segundo lanzamiento (la probabilidad es 1/6)

$$P_2 = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

¿Cual es la probabilidad que el primer jugador gane en el tercer lanzamiento?

Es que, no me salga un 6 en el primer lanzamiento (la probabilidad es 5/6), que mi enemigo tampoco le salga el 6 en su primer lanzamiento (la probabilidad es 5/6), no me salga un 6 en el segundo lanzamiento (la probabilidad es 5/6), que mi enemigo tampoco le salga el 6 en su segundo lanzamiento (la probabilidad es 5/6), pero que a mi me salga un 6 en mi tercer lanzamiento (la probabilidad es 1/6)

$$P_2 = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

¿Cual es la probabilidad que el primer jugador gane en el n-esimo lanzamiento?

$$P_n = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}$$

Luego, como gano con cualquiera de las opciones anteriores, debo sumar todas las probabilidades, pues deseo que ocupara una cosa "***o"*** otra, y el "*o"* en probabilidades es suma.

P_T = Es la probabilidad de que el jugador 1 gane.

$$P_T = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$P_T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2i-2} = \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}\right]$$

$$P_T = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2i}$$

$$P_T = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{25}{36}\right)^{i}$$

La sumatoria anterior es una sumatoria geométrica,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

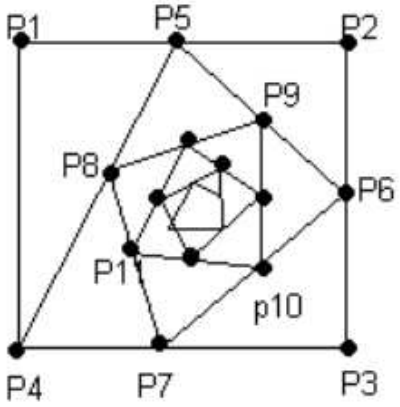
$$P_T = \frac{1}{6}\left[\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^n}{1-\frac{25}{36}}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^n}{\frac{11}{36}}\right] = \frac{6}{11}\left[1-\left(\frac{25}{36}\right)^n\right]$$

Pero como pueden estar jugando infinitamente,

$$P_T = \frac{6}{11}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{25}{36}\right)^n\right]$$

$$P_T = \frac{6}{11}$$

3. Partiendo de los vérices $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,1)$, $P_3 = (1,0)$, y $P_4 = (0,0)$ del cuadrado, construimos P_5 como el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, en general P_n es el punto medio de $P_{n-4}P_{n-3}$, si $n \geq 5$.



a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), muestre que

$$\frac{x_n}{2} + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$$

Solución:

Demostremos el problema por inducción,

Para $n=1$ se tiene $\frac{x_1}{2}+x_2+x_3+x_4=2$

Por enunciado,

$$\frac{\overbrace{x_1}^{=0}}{2}+\overbrace{x_2}^{=1}+\overbrace{x_3}^{=1}+\overbrace{x_4}^{=0}=2$$

$$2=2$$

Hipótesis: $\frac{x_n}{2}+x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}=2$

Por demostrar: $\frac{x_{n+1}}{2}+x_{n+2}+x_{n+3}+x_{n+4}=2$

Partamos con la ecuación anterior,

$$\frac{x_{n+1}}{2}+x_{n+2}+x_{n+3}+x_{n+4}=2$$

Sumemos y restemos, es decir sumemos cero,

$$\left(\frac{x_n}{2}-\frac{x_n}{2}\right)+\left(\frac{x_{n+1}}{2}-\frac{x_{n+1}}{2}\right)+\frac{x_{n+1}}{2}+x_{n+2}+x_{n+3}+x_{n+4}=2$$

Reestructuremos los términos,

$$-\frac{x_n}{2}-\frac{x_{n+1}}{2}+\frac{x_n}{2}+x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+x_{n+4}=2$$

Por hipótesis,

$$-\frac{x_n}{2}-\frac{x_{n+1}}{2}+\underbrace{\frac{x_n}{2}+x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}}_{=2}+x_{n+4}=2$$

$$-\frac{x_n}{2}-\frac{x_{n+1}}{2}+2+x_{n+4}=2$$

Es decir, $x_{n+4}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$, lo que se cumple por enunciado.

Luego, se cumple $\frac{x_{n+1}}{2}+x_{n+2}+x_{n+3}+x_{n+4}=2$

b) Encuentre el límite de (x_n).

Ahora, como sabemos que es convergente (pues nos piden calcular su limite, además en la figura se observa la convergencia) implica que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Mirando la relación del enunciado,

$$\frac{x_n}{2} + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$$

Es claro que si una sucesión es convergente, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, debido a que en el infinito no hay ninguna diferencia entre infinito y infinito más uno.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2} + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$$
$$\frac{x}{2} + x + x + x = 2$$
$$\frac{7x}{2} = 2$$
$$x = \frac{4}{7}$$

4. Exprese el número decimal periódico $23,4567676767676767\ldots$ como fracción.

<u>Solución</u>: (quizá sea mejor mirar el problema 5) primero, pues es más simple)

$$23{,}456767676767\ldots = 23 + \frac{45}{100} + \frac{67}{10^4} + \frac{67}{10^6} + \frac{67}{10^8} + \frac{67}{10^{10}} + \ldots + \frac{67}{10^{2n}}$$
$$23{,}456767676767\ldots = 23 + \frac{45}{100} + \frac{67}{10^4}\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \ldots + \frac{1}{10^{2n-4}}\right]$$
$$23{,}456767676767\ldots = 23 + \frac{45}{100} + \frac{67}{10^4}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^6 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^{2n-4}\right]$$
$$23{,}456767676767\ldots = 23 + \frac{45}{100} + \frac{67}{10^4}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{1}{10}\right)^{2i}$$
$$23{,}456767676767\ldots = 23 + \frac{45}{100} + \frac{67}{10^4}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{1}{100}\right)^{i}$$

La sumatoria anterior es una sumatoria geométrica,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$23{,}456767676767\ldots = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{10^4}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{1}{100}\right)^i = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{10^4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{100}}\right]$$

$$23{,}456767676767\ldots = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{10^4}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}}{\frac{99}{100}}\right]$$

$$23{,}456767676767\ldots = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{10^2\cdot 99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right]$$

$$23{,}456767676767\ldots = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{9900}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right]$$

Como el número anterior es periódico, implica que la *n* tiende al infinito.

$$23{,}456767676767\ldots = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{9900}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}\right] =$$

$$23{,}456767676767\ldots = 23+\frac{45}{100}+\frac{67}{9900}$$

5. Pruebe que $0,\bar{9} = 0,999999999\ldots$ es igual a 1.

Solución:

$$0{,}9999999\ldots = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\ldots+\frac{9}{10^n}$$

$$0{,}9999999\ldots = \frac{9}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right]$$

$$0{,}9999999\ldots = \frac{9}{10}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^0+\left(\frac{1}{10}\right)^1+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right]$$

$$0{,}9999999\ldots = \frac{9}{10}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{10}\right)^i$$

La sumatoria anterior es una sumatoria geométrica,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$0{,}9999999\ldots = \frac{9}{10}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{10}\right) =^{i} \frac{9}{10}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]$$

$$0{,}9999999\ldots = \frac{9}{10}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}\right]$$

$$9999999\ldots = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Como el número anterior es periódico, implica que la *n* tiende al infinito.

$$9999999\ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^n}_{=0}\right) = 1$$

7. Sea $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Es (a_n) acotada? ¿Es creciente?¿Es convergente?

Solución:

¿Es a_n acotada?

Para que una sucesión sea acotada, debe tener una cota inferior y otra superior.

- Propongo como cota inferior a 0.

Por demostrar entonces que $0 \le a_n$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Por inducción:

Para $n = 1$ se tiene $0 \le a_1 = \sqrt{2}$ (se cumple)

Hipótesis: $0 \le a_n$

Por demostrar: $0 \le a_{n+1}$

- Como en la inducción la hipótesis en un hecho, partimos de ella,

$0 \leq a_n$

Sumamos 2 a la ecuación,

$2 \leq a_n + 2$

Sacamos raíz a la ecuación,

$\sqrt{2} \leq \sqrt{a_n + 2}$

Pero, por relación de enunciado,

$\sqrt{2} \leq \sqrt{a_n + 2} = a_{n+1}$ (Se cumple)
$\sqrt{2} \leq a_{n+1} \Rightarrow 0 \leq a_{n+1}$

- Propongo como cota superior a 2.

Por demostrar entonces que $a_n \leq 2$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Por inducción:

Para $n = 1$ se tiene $a_1 \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq 2$ (se cumple)

Hipótesis: $a_n \leq 2$

Por demostrar: $a_{n+1} \leq 2$

- Como en la inducción la hipótesis en un hecho, partimos de ella,

$a_n \leq 2$

Sumamos 2 a la ecuación,

$a_n + 2 \leq 4$

Sacamos raíz a la ecuación,

$\sqrt{a_n + 2} \leq 2$

Pero, por relación de enunciado,

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq 2$

$a_{n+1} \leq 2$ (Se cumple inducción)

Como existe cota superior e inferior la sucesión es acotada.

¿Es a_n creciente?

Para demostrar que una sucesión es creciente, se debe probar que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Por inducción:

Para $n=1$ se tiene

$a_1 \leq a_2$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

(Se cumple)

Hipótesis: $a_n \leq a_{n+1}$

Por demostrar: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

- Como en la inducción la hipótesis en un hecho, partimos de ella,

$a_n \leq a_{n+1}$

Sumamos 2 a la ecuación,

$a_n + 2 \leq a_{n+1} + 2$

Sacamos raíz a la ecuación,

$\sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{a_{n+1} + 2}$

Pero, por relación de enunciado,

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{a_{n+1} + 2} = a_{n+2}$

$a_{n+1} \leq a_{n+2}$ (Se cumple inducción)

Esto implica que la sucesión es creciente.

¿Es a_n convergente?

Aplicamos el siguiente teorema,

Teorema.

(i) Una sucesión monótona acotada es convergente
(ii) Una sucesión monótona convergente es acotada

Como nuestra función es monótona y acotada, implica que es convergente.

Ahora, como sabemos que es convergente implica que,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Mirando la relación del enunciado,

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

Es claro que si una sucesión es convergente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, debido a que en el infinito no hay ninguna diferencia entre infinito y infinito más uno.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}$$
$$a = \sqrt{2+a}$$
$$a^2 - a - 2 = 0$$
$$(a-2)(a+1) = 0$$

Luego, $a = 2$, pues $a = -1$ no tiene sentido para el problema dado un $a_n \geq 0$

8. ¿Es cierto que si $a_n \to a$ entonces $cos(a_n) \to cos(a)$?

Solución:

¿Que debemos demostrar?

Si, para todo $0 < \varepsilon$ se tiene $|a_n - a| < \varepsilon$, por demostrar que $|\cos(a_n) - \cos(a)| < \varepsilon$.

Primero debemos deducir una relación bastante conveniente para este problema, vista en Matemática I.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) \quad (1)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) \quad (2)$$

Si sumamos (1) - (2)

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\cdot sen(\alpha)sen(\beta)$$

Si tomamos $a_n=\alpha+\beta \wedge a=\alpha-\beta$, obtenemos

$$\cos(a_n)-\cos(a)=-2\cdot sen\left(\frac{a_n+a}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{a_n-a}{2}\right)$$

$$\therefore \left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|=\left|2sen\left(\frac{a_n+a}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right| \qquad (3)$$

Utilizando (3)

$$\left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|=\left|2sen\left(\frac{a_n+a}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right|$$

Ya que $sen\left(\frac{a_n+a}{2}\right)\leq 1$ para todo $a_n, a\in \Re$

$$\left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|=\left|2sen\left(\frac{a_n+a}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right|\leq 2\cdot\left|1\cdot sen\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right|$$

$$\left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|\leq 2\cdot\left|sen\left(\frac{a_n-a}{2}\right)\right|$$

Ocupando la relación, $\left|sen(x)\right|\leq\left|x\right|$ para $x\in\Re$ (demostrada en Matemática I)

$$\left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|=2\cdot\left|\frac{a_n-a}{2}\right|$$

$$\left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|=\cdot\left|a_n-a\right|$$

Luego, como sabemos que $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$

$$\left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|\leq\cdot\left|a_n-a\right|<\varepsilon$$

$$\therefore \left|\cos(a_n)-\cos(a)\right|<\varepsilon$$

Entonces, si $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ implica que $\lim_{n\to\infty}\cos(a_n)=\cos(a)$.

13. A un paciente se le administra una inyección de 10 unidades de cierta medicina cada 24 horas. El paciente elimina el 20 % de la medicina que tiene en el cuerpo diaroiamente. Si la medicina supera el umbral de las 60 unidades en el cuerpo, la droga se vuelve peligrosa para el paciente. El tratamiento se puede continuar indefinidamente sin riesgo para el paciente?

Solución:

Definamos la siguiente sucesión.

X_n = Es la cantidad de unidades de cierta medicina en el cuerpo del paciente en el día ***n.***

En el día 1, el paciente tiene $x_1 = 10$

En el día 2, el paciente tiene $x_2 = 10 \cdot 0{,}8 + 10$

En el día 3, el paciente tiene
$$x_3 = (10 \cdot 0{,}8 + 10) \cdot 0{,}8 + 10$$
$$x_3 = 10 \cdot 0{,}8^2 + 10 \cdot 0{,}8 + 10$$

En el día 4, el paciente tiene
$$x_4 = \left(10 \cdot 0{,}8^2 + 10 \cdot 0{,}8 + 10\right) \cdot 0{,}8 + 10$$
$$x_4 = 10 \cdot 0{,}8^3 + 10 \cdot 0{,}8^2 + 10 \cdot 0{,}8 + 10$$

.
.

En el día n, el paciente tiene $x_n = 10 \cdot 0{,}8^{n-1} + 10 \cdot 0{,}8^{n-2} + \ldots + 10 \cdot 0{,}8 + 10$

$$x_n = 10 \cdot 0{,}8^{n-1} + 10 \cdot 0{,}8^{n-2} + \ldots + 10 \cdot 0{,}8 + 10$$
$$x_n = 10\left[\cdot 0{,}8^{n-1} + 0{,}8^{n-2} + \ldots + 0{,}8 + 1\right]$$
$$x_n = 10\sum_{i=0}^{n-1} 0{,}8^i$$
$$x_n = 10\left[\frac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8}\right] = 50 \cdot \left[1 - 0{,}8^n\right]$$

Pero como se inyectara toda la vida,

$$x_T = 50 \lim_{n \to \infty} \left[\left[1 - 0{,}8^n\right]\right]$$
$$x_T = 50$$

Se concluye que no hay problema que tome toda la vida el medicamento, pues nunca supera las 60 unidades, con que el medicamento se vuelve peligroso.

15. Considera la sucesin definida por recurrencia como sigue:

$$a_1 = 1, \quad \text{y} \quad s_{n+1} = \sqrt{\frac{9 + (a_n)^2}{2}} \ \forall n \geq 1$$

a) Demuestra que a_n es creceinte.

b) Demuestra que a_n es acotada.

c) Cuál es el límite d ela sucesin?

Solución:

¿Es a_n acotada?

Para que una sucesión sea acotada, debe tener una cota inferior y otra superior.

- Propongo como cota inferior a 0.

Por demostrar entonces que $0 \leq a_n$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Por inducción:

Para $n = 1$ se tiene $0 \leq a_1 = 1$ (se cumple)

Hipótesis: $0 \leq a_n$

Por demostrar: $0 \leq a_{n+1}$

- Como en la inducción la hipótesis en un hecho, partimos de ella,

$0 \leq a_n$

Elevamos al cuadrado la ecuación,

$0 \leq (a_n)^2$

Sumamos 9 y dividimos por 2

$$\frac{9}{2} \leq \frac{(a_n)^2 + 9}{2}$$

Sacamos raíz,

$$\sqrt{\frac{9}{2}} \leq \sqrt{\frac{(a_n)^2 + 9}{2}}$$

$\sqrt{\frac{9}{2}} \leq \sqrt{\frac{(a_n)^2+9}{2}} = a_{n+1}$ (Se cumple)

$\sqrt{\frac{9}{2}} \leq a_{n+1} \Rightarrow 0 \leq a_{n+1}$

- Propongo como cota superior a 3.

Por demostrar entonces que $a_n \leq 3$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Por inducción:

Para $n=1$ se tiene $a_1 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 3$ (se cumple)

Hipótesis: $a_n \leq 3$

Por demostrar: $a_{n+1} \leq 3$

- Como en la inducción la hipótesis en un hecho, partimos de ella,

$a_n \leq 3$

Elevamos al cuadrado la ecuación,

$(a_n)^2 \leq 9$

Sumamos 9 y dividimos por 2

$\frac{(a_n)^2+9}{2} \leq \frac{9+9}{2}$

Sacamos raíz,

$\sqrt{\frac{(a_n)^2+9}{2}} \leq \sqrt{\frac{9+9}{2}} = 3$

Pero, por relación de enunciado,

$a_{n+1} = \sqrt{\frac{(a_n)^2+9}{2}} \leq 3$

$a_{n+1} \leq 3$ (Se cumple inducción)

Como existe cota superior e inferior la sucesión es acotada.

¿Es a_n creciente?

Para demostrar que una sucesión es creciente, se debe probar que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Por inducción:

Para $n=1$ se tiene

$a_1 \leq a_2$

$1 \leq \sqrt{\frac{9+1}{2}} = \sqrt{5}$

(Se cumple)

Hipótesis: $a_n \leq a_{n+1}$

Por demostrar: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

- Como en la inducción la hipótesis en un hecho, partimos de ella,

$a_n \leq a_{n+1}$

Elevamos la ecuación al cuadrado, le sumamos 9 y dividimos por 2.

$$\frac{(a_n)^2+9}{2} \leq \frac{(a_{n+1})^2+9}{2}$$

Sacamos raíz a la ecuación,

$$\sqrt{\frac{(a_n)^2+9}{2}} \leq \sqrt{\frac{(a_{n+1})^2+9}{2}}$$

Pero, por relación de enunciado,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{(a_n)^2+9}{2}} \leq \sqrt{\frac{(a_{n+1})^2+9}{2}} = a_{n+2}$$

$a_{n+1} \leq a_{n+2}$ (Se cumple inducción)

Esto implica que la sucesión es Creciente

¿Es a_n convergente?

Aplicamos el siguiente teorema,

Teorema.

(i) Una sucesión monótona acotada es convergente
(ii) Una sucesión monótona convergente es acotada

Como nuestra función es monótona y acotada, implica que es convergente.

Ahora, como sabemos que es convergente implica que,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Mirando la relación del enunciado,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{9+(a_n)^2}{2}}$$

Es claro que si una sucesión es convergente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, debido a que en el infinito no hay ninguna diferencia entre infinito y infinito más uno.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9+(a_n)^2}{2}}$$

$$a = \sqrt{\frac{9+a^2}{2}}$$

$$a^2 = \frac{9+a^2}{2}$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$a = -3$$

Luego, $a = 3$, pues $a = -3$ no tiene sentido para el problema dado un $a_n \geq 0$

20. Calcule el límite de las siguientes sucesiones:

a)

$$a_n = \frac{n+4}{3n-2}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{3n-2}$$

Ahora, dividiremos por el elemento de mayor grado.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{3n-2} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$$

b)

$$a_n = \frac{2n^3+1}{5n-n^3}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{5n-n^3}$$

Ahora, dividiremos por el elemento de mayor grado.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{5n-n^3} \cdot \frac{1/n^3}{1/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n^2}-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

c)

$$a_n = \frac{n^2+3n+4}{4n^3-2n+6}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+4}{4n^3-2n+6}$$

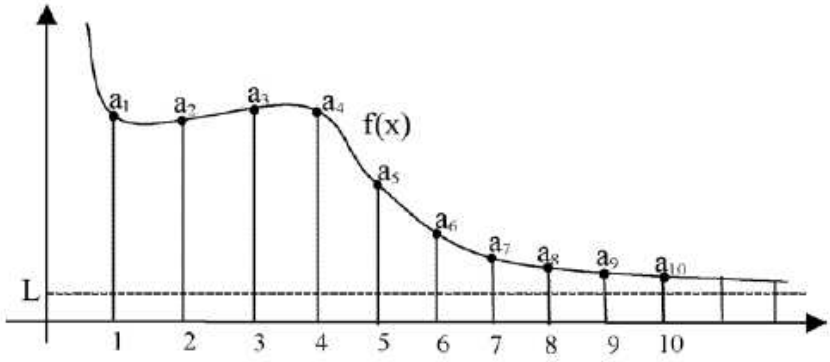
Ahora, dividiremos por el elemento de mayor grado.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+4}{4n^3-2n+6}\cdot\frac{1/n^3}{1/n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{4-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=\frac{0}{4}=0$$

IMPORTANTE: Algunos de los próximos ejercicios contemplan la regla del L' Hopital que debe ser ocupada con algunas sutilezas.

Teorema 1:

Sea $f(x)$ una función real de variable real tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n)=a_n$ para todo entero positivo n, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n=L$.



La regla del L' Hopital no es aplicable directamente a sucesiones, pues una sucesión no es diferenciable. Pero al ocupar el *Teorema 1* podemos convertir nuestra sucesión en una función continua y bonita, pues las dos convergen a lo mismo (es claro en la figura anterior).

d)

$$a_n=\frac{\ln(n)}{n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}$$

Por Teorema 1,

$$a_n=f(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Es decir, nuestro problema se suscribe a obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

Como ahora tenemos una función continua, con el denominador y el numerador tendiendo al infinito, aplicamos el L' hopital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ahora, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

e)

$$a_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

Usemos el *Teorema del encaje*,

Sabemos que $-1 \le \sin(n) \le 1$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Ahora dividiendo por *n,*

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$$

Aplicando un límite al infinito,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$
$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} \le 0$$

Por Teorema del encaje, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

f)

$$a_n = \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}}$$

Usemos el *Teorema del encaje*,

Sabemos que $-1 \le \sin(2^n) \le 1$ para todo *n* perteneciente a los naturales.

Ahora dividiendo por $\sqrt{n}$,

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Aplicando un límite al infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}} \le 0$$

Por Teorema del encaje, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt{n}} = 0$

g)

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Usemos racionalización,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2}=0$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

h)

$$a_n=\frac{n!}{(n+1)!+1}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!+1}$$

Ahora, dividiremos por el elemento de mayor grado.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!+1}\cdot\frac{1/n!}{1/n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)+\frac{1}{n!}}=0$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!+1}=0$$

i)

$$a_n=\frac{n!}{n^n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{n}\right)$$

Ahora, una constante dividida por *n,* cuando *n* tiende al infinito es igual a cero.

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{=0}\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{n}\right)=0$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

j)

$$a_n=\frac{3^n}{n!}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot3\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{3}{n}\right)$$

Ahora, una constante dividida por *n,* cuando *n* tiende al infinito es igual a cero.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{n}\right)}_{=0}=0$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$$

k)

$$a_n=\frac{\ln(n^{-1})}{n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^{-1})}{n}$$

Por Teorema 1,

$$a_n=f(n)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

Es decir, nuestro problema se suscribe a obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1})}{x}$$

Como ahora tenemos una función continua, con el denominador y el numerador tendiendo al infinito, aplicamos el L' hopital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^{-1})}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln(x^{-1})\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^{-2}/x^{-1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Ahora, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

IMPORTANTE: Para realizar los próximos ejercicios necesitamos tener presente lo siguiente.

Definición 8.1. *La función exponencial está definida mediante la expresión:*

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n.$$

l)

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

<u>Solución</u>:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

Reescribiendo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n$$

Aplicando la **Definición 8.1**,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n}\right) = e^{-1}$$

m)

$$a_n = \left(\frac{n}{n-1} \right)^n$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^n$$

Reescribiendo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-1}{n} \right)^n \right]^{-1} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n} \right)^n \right]^{-1}$$

Aplicando la **Definición 8.1**,

$$\left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n} \right) \right]^{-1} = \left[e^{-1} \right]^{-1} = e^1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^n = e$$

n)

$$a_n = \left(1+\frac{2}{n} \right)^{n+2}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^{n+2}$$

Reescribiendo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^n \left(1+\frac{2}{n} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^2$$

Aplicando la **Definición 8.1**,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^2 = e^2 \cdot 1^2 = e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+2}=e^2$$

ñ)

$$a_n=n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$$

Por Teorema 1,

$$a_n=f(n)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

Es decir, nuestro problema se suscribe a obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$

Reescribiendo,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}$$

Como ahora tenemos una función continua, con el denominador y el numerador tendiendo a cero, aplicamos el L' hopital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

Ahora, como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

o)

$$a_n = \left[\frac{n-1}{n}\right]$$

Solución:

Partamos por ver las primeras imágenes de la sucesión.

$$a_1 = \left[\frac{1-1}{1}\right] = 0$$
$$a_1 = \left[\frac{2-1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$
$$a_1 = \left[\frac{3-1}{3}\right] = \left[\frac{2}{3}\right] = 0$$

Ahora, veamos que sucederá en el infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\right] = 1$$ (No estoy absolutamente seguro)