Ignacio Trujillo Silva
Ayudante Matemática II
Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato

Resolución de ecuaciones diferenciales por polinomios de Taylor.

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$f''(x)+w^2 f(x)=0$$

<u>Solución:</u>

Consideremos la serie de potencias general,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Para usar la relación del enunciado, necesitamos $f''(x)$.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

Ahora, considerando $f''(x)+w^2 f(x)=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + w^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Realizaremos un cambio de límites en la segunda sumatoria para que las dos partan de 2,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + w^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

Juntando las sumatorias y factorizando,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + w^2 a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} \underbrace{\left[a_n n(n-1) + w^2 a_{n-2}\right]}_{=0} = 0$$

Hay dos posibles soluciones, la solución trivial *x=0* y en la cual los coeficientes son cero.

$$a_n n(n-1) + w^2 a_{n-2} = 0$$

$$a_n = \frac{-w^2 a_{n-2}}{n(n-1)}$$

Luego, como hay una diferencia de 2 en la sucesión anterior, tendremos una serie para los pares y otra para los impares.

$$a_n = \frac{-w^2 a_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{-w^2 a_0}{2 \cdot 1} = \frac{-w^2 a_0}{2!}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{-w^2 a_2}{4 \cdot 3} = \frac{w^4 a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{w^4 a_0}{4!}$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = \frac{-w^2 a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-w^6 a_0}{4! \cdot 6 \cdot 5} = \frac{-w^6 a_0}{6!}$$

$$\vdots$$

$$n = 2i \Rightarrow a_{2i} = \frac{(-1)^i w^{2i} a_0}{(2i)!}$$

Ahora, para los impares,

$$a_n = \frac{-w^2 a_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{-w^2 a_1}{3 \cdot 2} = \frac{-w^2 a_1}{3!}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{-w^2 a_3}{5 \cdot 4} = \frac{w^4 a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{w^4 a_1}{5!}$$

$$n = 7 \Rightarrow a_7 = \frac{-w^2 a_4}{7 \cdot 6} = \frac{-w^6 a_1}{5! \cdot 7 \cdot 6} = \frac{-w^6 a_1}{7!}$$

$$\vdots$$

$$n = 2i+1 \Rightarrow a_{2i+1} = \frac{(-1)^i w^{2i} a_1}{(2i+1)!} \frac{w}{w} = \frac{(-1)^i w^{2i+1} a_1'}{(2i+1)!}$$

Reemplazando en la ecuación original,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i w^{2i} a_0}{(2i)!} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i w^{2i+1} a_1'}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

$$f(x) = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i w^{2i}}{(2i)!} x^{2i} + a_1' \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i w^{2i+1}}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

$$f(x) = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (wx)^{2i}}{(2i)!} + a_1' \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (wx)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$f(x) = a_0 \cos(wx) + a_1' sen(wx)$$

2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$f''(x) - w^2 f(x) = 0$$

<u>Solución:</u>

Consideremos la serie de potencias general,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Para usar la relación del enunciado, necesitamos $f''(x)$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

Ahora, considerando $f''(x) - w^2 f(x) = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - w^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Realizaremos un cambio de límites en la segunda sumatoria para que las dos partan de 2,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - w^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

Juntando las sumatorias y factorizando,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - w^2 a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} \underbrace{\left[a_n n(n-1) - w^2 a_{n-2}\right]}_{=0} = 0$$

Hay dos posibles soluciones, la solución trivial *x=0* y en la cual los coeficientes son cero.

$$a_n n(n-1) - w^2 a_{n-2} = 0$$

$$a_n = \frac{w^2 a_{n-2}}{n(n-1)}$$

Luego, como hay una diferencia de 2 en la sucesión anterior, tendremos una serie para los pares y otra para los impares.

$$a_n = \frac{w^2 a_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{w^2 a_0}{2\cdot 1} = \frac{w^2 a_0}{2!}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{w^2 a_2}{4\cdot 3} = \frac{w^4 a_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{w^4 a_0}{4!}$$

$$n=6 \Rightarrow a_6 = \frac{w^2 a_4}{6\cdot 5} = \frac{w^6 a_0}{4!\cdot 6\cdot 5} = \frac{w^6 a_0}{6!}$$

$$\vdots$$

$$n=2i \Rightarrow a_{2i} = \frac{w^{2i} a_0}{(2i)!}$$

Ahora, para los impares,

$$a_n = \frac{w^2 a_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{w^2 a_1}{3\cdot 2} = \frac{w^2 a_1}{3!}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{w^2 a_3}{5\cdot 4} = \frac{w^4 a_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{w^4 a_1}{5!}$$

$$n=7 \Rightarrow a_7 = \frac{w^2 a_4}{7\cdot 6} = \frac{w^6 a_1}{5!\cdot 7\cdot 6} = \frac{w^6 a_1}{7!}$$

$$\vdots$$

$$n=2i+1 \Rightarrow a_{2i+1} = \frac{w^{2i} a_1}{(2i+1)!}\frac{w}{w} = \frac{w^{2i+1} a_1'}{(2i+1)!}$$

Reemplazando en la ecuación original,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^{2i} a_0}{(2i)!} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^{2i+1} a_1'}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

$$f(x) = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^{2i}}{(2i)!} x^{2i} + a_1' \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^{2i+1}}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

$$f(x) = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(wx)^{2i}}{(2i)!} + a_1' \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(wx)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$f(x) = a_0 \cosh(wx) + a_1' senh(wx)$$

3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$f'(x)-f(x)=e^x$ y $f(0)=0$

Solución:

Consideremos la serie de potencias general,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$f(0)=a_0=0$$

Para usar la relación del enunciado, necesitamos $f''(x)$.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}$$

Ahora, considerando $f'(x)-f(x)=e^x$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Realizaremos un cambio de límites para que todas las series partan de 1,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Juntando las sumatorias y factorizando,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-1} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\underbrace{\left[a_n n - a_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!}\right]}_{=0}=0$$

Hay dos posibles soluciones, la solución trivial *x=0* y en la cual los coeficientes son cero.

$$a_n n - a_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!}=0$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}+\frac{1}{n!}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{1}{n!}$$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{1} + \frac{1}{1!} = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} + \frac{1}{3!} = \frac{2+1}{3!} = \frac{1}{2!}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} + \frac{1}{4!} = \frac{1/2!}{4} + \frac{1}{4!} = \frac{3+1}{4!} = \frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

$$n = n \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

La relación anterior es fácilmente demostrable por inducción.

Reemplazando en la ecuación original,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$f(x) = x\left[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^x}\right]$$

$$f(x) = xe^x$$