(TEOREMA DE TAYLOR)

Supóngase que f', ..., $f^{(n+1)}$ están definidas sobre $[a, x]$, y que $R_{n,a}(x)$ está definido por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

Entonces

$$(2)\quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \textbf{para algún } t \textbf{ de } (a, x).$$

Ejercicios prácticos,

1. Hallar los polinomios de Taylor (del grado indicado y en torno al punto indicado) para la siguiente función.

$f(x) = e^{\sin x}; grado\ 4, en\ 0$.

<u>Solución</u>:

$f(0) = 1$

$f'(x) = e^{\sin x}\cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^{\sin x}\cos^2 x + e^{\sin x}\sin x \Rightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^{\sin x}\cos^3 x + e^{\sin x}\cos x\sin x + e^{\sin x}\cos x + e^{\sin x}2\cos x\sin x \Rightarrow f'''(0) = 2$

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

2. Escribir una suma (utilizando la notación $\sum$) que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se especifica. Para reducir al mínimo los cálculos superfluos, consúltese la calculadora.

i) $\sin(1); \text{error} < 10^{-5}$

<u>Solución</u>:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$
$$f^{IV}(x) = \sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$

Luego,

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(o)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$
$$P(x) = \frac{1}{1!}(x) + \frac{-1}{3!}(x)^3 + \frac{1}{5!}(x)^3 + \frac{-1}{7!}(x)^3 \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x)^{2n+1}$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$P(2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i 1^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Ahora, tratamos el error

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
$$\Rightarrow R(2) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(1-0)^{2n+2} = \frac{\sin(\xi)}{(2n+2)!}(1)^{2n+2} \leq \frac{1}{(2n+2)!}, \text{pues} \quad \sin(\xi) \leq 1 \,\forall\, \xi \in [0,2]$$

Tenemos que encontrar el *n* para el cual se cumple,

$\frac{1}{(2n+2)!} \leq 10^{-5}$ Es fácil ver que para $n \geq 4$, se cumple la preposición.

Tener en cuenta que $\sin(1) = P(1) + R(1)$

$$\sin(1) \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}$$

ii) e ; error $< 10^{-4}$

<u>Solución</u>:

$$f(x) = e^{x} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^{x} \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = e^{x} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

Luego,

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^{n}$$
$$P(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x) + \frac{1}{2!}(x)^{2} + \ldots + \frac{1}{n!}(x)^{n}$$
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i}}{(i)!}$$
$$P(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i)!}$$

Ahora, tratamos el error

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
$$\Rightarrow R(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1)^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}, \text{porque } \xi \in [0,1]$$

Tenemos que encontrar el n para el cual se cumple,

$\dfrac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$ Es fácil ver que para $n \geq 7$, se cumple la preposición.

Tener en cuenta que $\exp(1) = P(1) + R(1)$

$$\exp(1) \approx \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{(i)!}$$

1. Encuentre un intervalo I y una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tal que sea igual a la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{3-x}$.

Solución:

Notemos primero que si $x \neq 3$ se tiene que

$$\frac{2x}{3-x} = \frac{2x}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right]$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Además sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

si y solamente si $r \in (-1, 1)$.

Haciendo $r = \frac{x}{3}$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

si y solo si $\frac{x}{3} \in (-1, 1)$, o equivalentemente $x \in (-3, 3)$

Luego la función $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{3-x}$ se puede escribir como

$$f(x) = \frac{2x}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} x^{n+1}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} x^n$$

2. Encuentre la serie de Taylor centrada en cero de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(x) + senh(x)$.

   Solución:

   Notamos primero que

$$senh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(\sum \frac{x^n}{n!} - \sum \frac{(-1)^n x^n}{n!}) = \frac{1}{2}(\sum \frac{x^n}{n!} - \frac{(-1)^n x^n}{n!})$$

$$= \sum (1 - (-1)^n) \frac{x^n}{n!}$$

   Pero $1 - (-1)^n = 0$ si n es par y $1 - (-1)^n = 2$ si n es impar. Por lo tanto

$$senh(x) = \frac{1}{2}(2 \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}) = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Por otra parte sabemos que

$$sen(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   Por lo tanto

$$f(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum ((-1)^n + 1) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Pero $(-1)^n + 1 = 2$ si n es par y $(-1)^n + 1 = 0$ si n es impar. Por lo tanto:

$$f(x) = 2 \sum \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

1. Encuentre un intervalo I y una serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tal que sea igual a la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{3+x}$.

<u>Solución:</u>

Notamos primero que la forma de la serie de potencias muestra que ésta está centrada en cero, por lo tanto I es un intervalo centrado en cero.

Además notamos que

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{-x}{3}}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; \forall x \in (-1,1)$$

Se tiene que

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{-x}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{3}\right)^n, \text{ con } -1 < \frac{-x}{3} < 1$$

Es decir, para cada $x \in I = (-3,3)$ se tiene que

$$\frac{1}{3+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}?$$

<u>Solución:</u>

Tomando $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ se tiene que:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\boxed{3 \text{ puntos}}$$

$$= \lim \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$\boxed{2 \text{ puntos}}$$

Luego el radio de convergencia es $R = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$

1. Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y $\sum a_n$ es convergente. Demuestra que $\sum(a_n)^2$ también es convergente.

Solución:

Como $\sum a_n$ es convergente, implica que $(a_n) \to 0$, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n < 1, \quad \forall n \geq N$$

$$\boxed{3 \text{ puntos}}$$

Por lo tanto, si $n \geq N$ se tiene que

$$0 \leq (a_n)^2 \leq a_n,$$

$$\boxed{2 \text{ puntos}}$$

Así se tiene, por criterio de comparación directa que

$$\sum (a_n)^2, \qquad \text{converge.}$$

$$\boxed{1 \text{ punto}}$$

2. Decida si la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Solución:

Consideremos la sucesión positiva

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

El cuociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Por lo tanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{e} < 1$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Por lo tanto, utilizando el criterio del cuociente se tiene que

$$\sum a_n, \quad \text{converge}$$

P1: Encuentre el radio de convergencia de la serie:

$$\sum \frac{a_n}{n!} x^n, \text{ con } a_{2n+1} = 0, \;\; a_{2n} = (-1)^n$$

1. **Solución 1:**

   La serie
   $$\sum \frac{a_n}{n!} x^n, \text{ con } a_{2n+1} = 0, \;\; a_{2n} = (-1)^n$$
   es igual a
   $$\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum b_n y^n \;\text{ con }\; y = x^2, \;\; b_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

   $\boxed{\text{2 puntos}}$

   En este caso estamos en presencia de una serie de potencias con (b_n) nunca nula, entonces calculando el límite del cuociente se tiene:

   $$|\frac{b_{n+1}}{bn}| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \to 0$$

   $\boxed{\text{2 puntos}}$

   Luego el radio de convergencia es infinito. Es decir, $y \in \mathbb{R}$, es decir $x^2 \in \mathbb{R}$ es decir, $x \in \mathbb{R}$. Luego el radio de convergencia para
   $$\sum \frac{a_n}{n!} x^n, \text{ con } a_{2n+1} = 0, \;\; a_{2n} = (-1)^n$$
   es infinito.

P2: Encuentre la serie de potencias de

$f(x) = \frac{-1}{x}$

Solución 2:

Recordemos que $\sum r^n$ converge si y solo si $|r| < 1$, y en este caso converge a $\frac{1}{1-r}$.
Si hacemos $r = x + 1$ se tiene que

$$\sum(1+x)^n = \sum r^n = \frac{1}{1-r}$$

siempre y cuando $r \in (-1, 1)$, es decir

$$\sum(1+x)^n = \frac{1}{1-(1+x)} = \frac{-1}{x}$$

para cualquier valor que cumpla que $x + 1 \in (-1, 1)$ o lo que es lo mismo $x \in (-2, 0)$. Es decir la función $f : (-2, 0) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{-1}{x}$ también se puede escribir como

$$f(x) = \sum(1+x)^n.$$

Prestar atención!

5. Suponga que $P(k)$ representa la población en una colonia de bacterias k minutos después de comenzadas las observaciones. Experimentalmente se encuentra la siguiente relación: $P(k+1) = 0{,}03P(k) + 1000$. Si $P(0) \neq 1$, encuentre $P(k)$.

6. Sea $p(n)$ la probabilidad de que una mosca hembra seleccionada al azar produzca n crías durante su vida. Si un experimento indica que $p(n+1) = 0{,}4p(n)$, halle la probabilidad de que una mosca escogida al azar sea estéril.