Control 2 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elije sólo un problema.

1. Calcule el área comprendida entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x+3$.

   Solución:

   Notar que el área comprendida entre las curvas f y g queda determinada por la siguiente expresión

$$A = \int_{-1}^{3} g(x)dx - \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

   La razón es que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [-1, 3]$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

   El intervalo en cuestión resulta de ver para que valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$, es decir $x^2 = 2x + 3$. Esto ultimo equivale a decir que $(x+1)(x-3) = 0$, por tanto $x = -1$ y $x = 3$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Luego usando las propiedades de la integral se tiene que

$$A = 2\int_{-1}^{3} x dx + \int_{-1}^{3} 3dx - \int_{-1}^{3} x^2 dx = 2\frac{x^2}{2}|_{-1}^{3} + 3x|_{-1}^{3} - \frac{x^3}{3}|_{-1}^{3}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto

$$A = \frac{14}{3}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Sean $f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$. Demuestre que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \leq 1$$

<u>Solución:</u>

Notar que para todo $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ se tiene que $sen(x) \leq 1$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por otro lado, si $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ entonces $\frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{\pi}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por tanto

$$\frac{sen(x)}{x} \leq \frac{2}{\pi}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$