Control 4 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elije sólo un problema.

1. Calcule el siguiente límite.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{n\sqrt{\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})k}{n}}}$$

<u>Solución:</u> Notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{n\sqrt{\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})k}{n}}} &= 2\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2n\sqrt{\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})k}{n}}}\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})k}{n}}}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{n}\\ &= 2\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)(t_{k+1}-t_k)\end{aligned}$$

donde $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $t_k=\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})k}{n}$, con $k=0,1,\ldots,n-1$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Como f es integrable en $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, se tiene que

$$2 \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k) = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} f(x)dx$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

donde

$$2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

Por tanto

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{n\sqrt{\sqrt{2} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})k}{n}}} = 2\sqrt{\sqrt{3}} - 2\sqrt{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

2. Encuentre la familia de primitivas de

$$\int xln(x)dx$$

<u>Solución:</u> Sea $u = ln(x)$ y $dv = xdx$ entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Luego por teorema de integración por partes se tiene que

$$\int xln(x)dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

donde

$$\int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{4}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por tanto

$$\int xln(x)dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$