Sexto Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Primavera, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Resuelva solo uno de los siguientes problemas.

1. Calcula la familia de primitivas:

$$\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$$

Solución:

Descomponiendo en fracciones parciales resulta:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

Por lo tanto:

$$A+B=1$$

$$A+B+C=2$$

$$A+C=1$$

De donde resulta $A=C=1$ y $B=0$, por lo tanto:

$$\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = \int \frac{dx}{(x+1)} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)}$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

$$\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = \log(x+1) + \int \frac{dx}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

$$\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = \log(x+1) + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}dx$$

$$\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = \log(x+1) + \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

$$\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = \log(x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)+C$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. Una tanque contiene 500 litros de agua fluorada, que contiene 1 kilo de fluor. La solución fluye del tanque a un ritmo de 4 litros por minuto y se reemplaza al mismo ritmo por agua pura.¿Cuál es la cantidad de fluor existente en el tanque en cada instante?

   <u>Solución:</u>

   Denotemos por $f(t)$ la masa del fluor en el tanque en el instante t (t medido en minutos, y $f(t)$ medido en kilogramos). Entonces

$$f'(t) = -\text{velocidad en que sale fluor}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

$$f'(t) = (\text{velocidad en que sale solución})(\text{concentración de fluor})$$

$$f'(t) = -4\times\frac{f(t)}{500}$$

$$f'(t) = \frac{-1}{125}f(t)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-1}{125}$$

Integrando respecto a t resulta:

$$\log(f(t)) = \frac{-t}{125} + C$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Tomando exponencial, resulta:

$$f(t) = K \exp(\frac{-t}{125})$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Evaluando en $t = 0$, se tiene que $f(0) = 1 = K$. Entonces la cantidad de fluor (medido en kilogramos) que hay en el tanque en cada instante t (medido en minutos) es :

$$f(t) = \exp(\frac{-t}{125})$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$